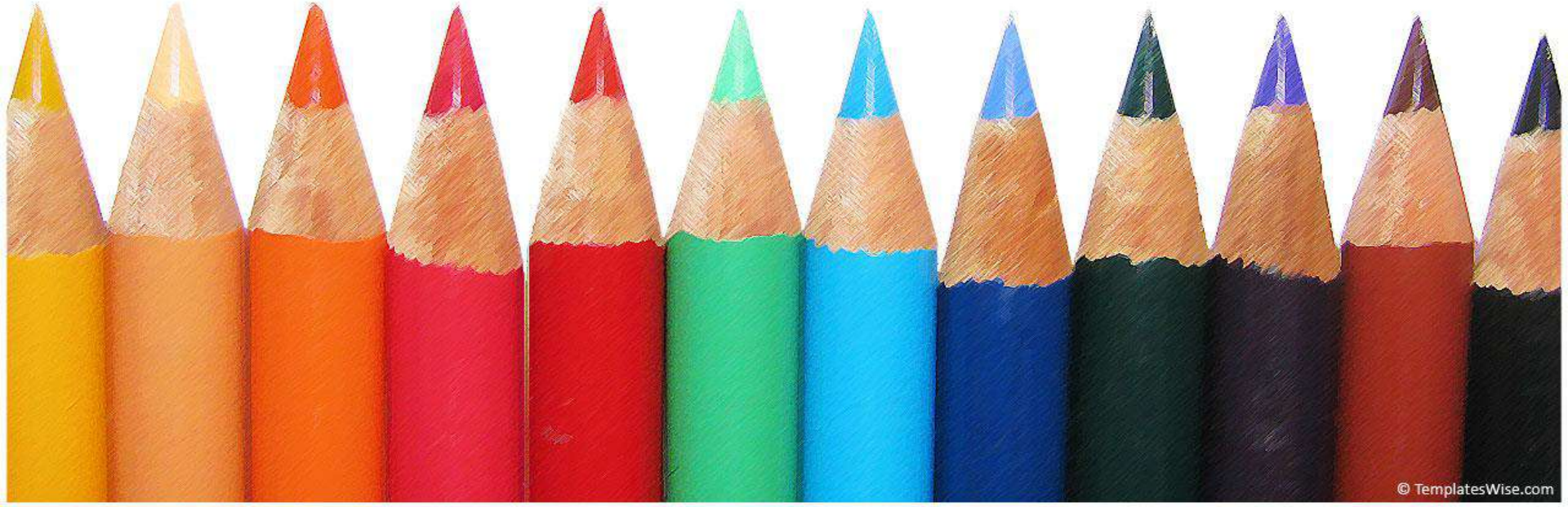
教育統計學

編撰：

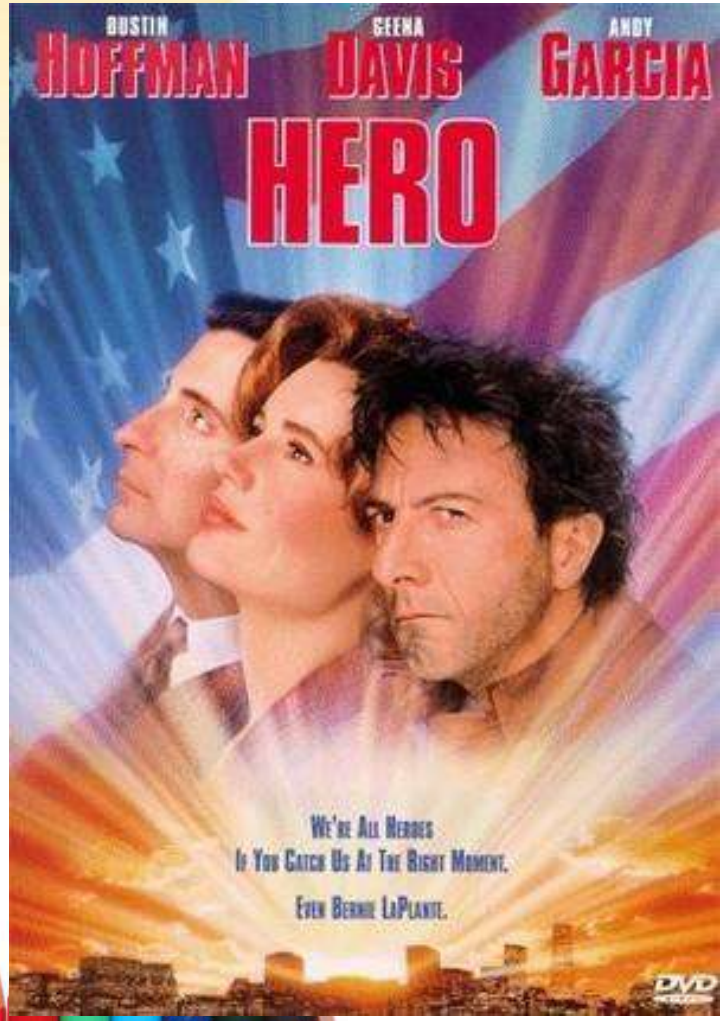
謝錦城、王振世、丁志堅、許慧玉

教育統計（初級）



序言

導讀電影：小人物大英雄（Accidental Hero）



你所看到的，
都是真的嗎？

我們要不斷質疑並挑戰
我們信以為真的事實

- 知識

  每個人所認知的世界

- 知識的來源

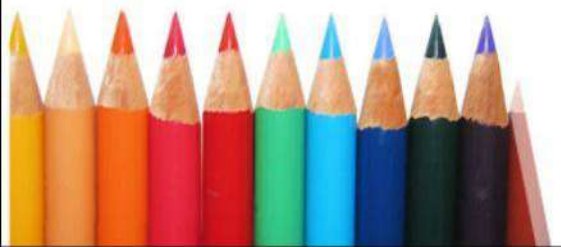
  權威、傳統、常識、媒體報導、個人經驗

- 知識的限制

  過度通則化、選擇性觀察、過早妄下斷語、月暈效果

- 科學知識

  經過科學驗證的知識



- 科學

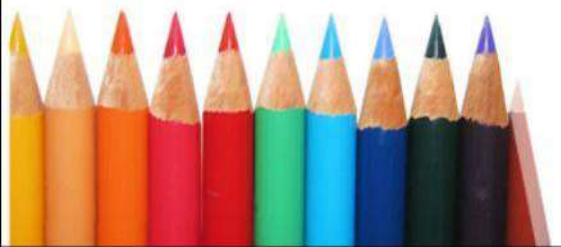
  提出假說、不斷驗證、成為定律的步驟

- 研究

  發現問題答案的動態過程與科學方法

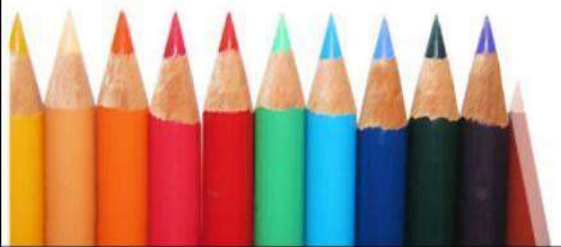
- 統計學

  科學研究中，描述(敘述統計學)與分析(推論統計學)資料的技術



什麼是統計

- 統計是從數據當中找出資訊，藉以為假設提供證據，做成通則結論的方法



數據

- 數據勝過軼聞

  信仰不能取代數字

  （Henry Spencer）

- 數據從何而來非常重要

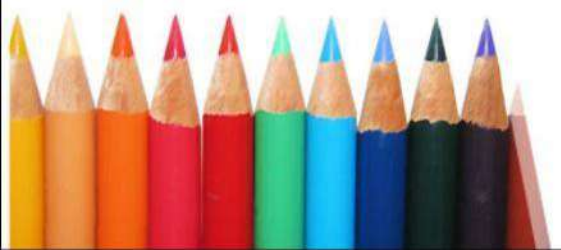
  數字不會說謊，但說謊的人會想出辦法

  （Charles Grosvenor）

- 數據可以反映社會價值

  要用統計騙人很容易。但是不用統計，騙人更容易

  （Frederick Mosteller）



假設

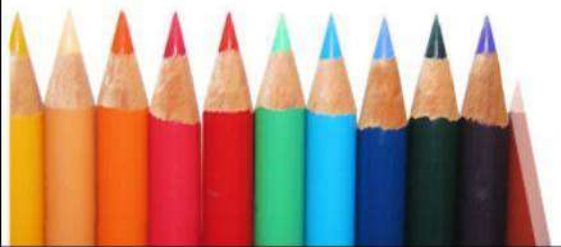
- 小心潛在變數

  我的錢夠我這輩子用了，只要我不買東西

  （Jackie Mason）

- 虛假相關

  統計研究發現，冰淇淋銷量最高的時候，就是公共泳池的溺水事故發生得最多的時候。



通則

- 結論並不是百分之百的

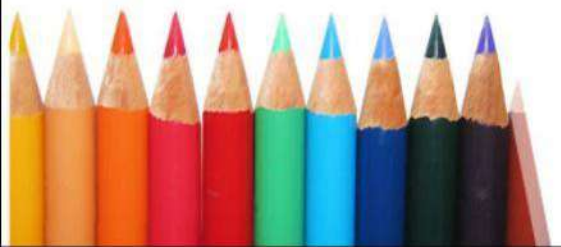
  數學定律不能百分之百確實的用在現實生活裡；能百分之百確實的用數學定律描述的，就不是現實生活

  （Albert Einstein）

- 變異無所不在→個案不能推翻通則

  當事實改變時，我就改變主意，您呢？

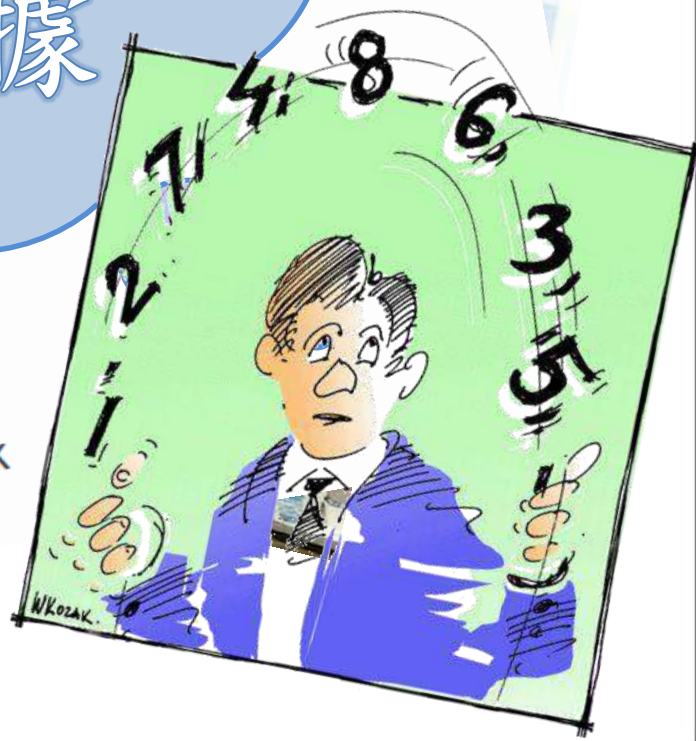
  （John Maynard Keynes）



第一章

緒論

統計
是科學的數據

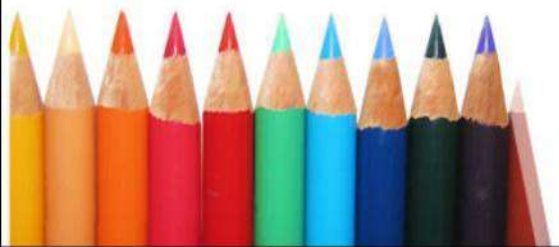


統計方法使用的目的

- 在研究的進行中，針對研究問題利用各種研究方法所蒐集到的資料（如問卷、訪談等），只是原始資料，沒有辦法回答研究問題。
- 統計方法的使用，就是把原始資料做系統的整理，加以分析以解釋研究變項，進而回答研究問題。

統計發展三時期

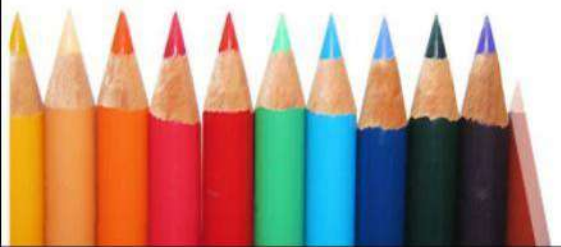
- 古典統計初始時期：從描述統計到推論統計
- 古典統計發展時期：統計決策理論的成熟
- 現代統計時期：統計的電子化時代



統計學的分類

從統計所涉及的知識內涵來看

- 理論統計（theoretical statistics）
  - 關心統計的基本原理與理論內涵，多以數學模式的推導或模擬方法來探討統計的相關問題
- 應用統計（applied statistics）
  - 強調統計方法如何解決各種研究問題，多涉及研究場域的實證資料分析與具體研究課題的解決



統計學的分類

從統計的功能來看

- 描述統計：使用計算、測量、描述或劃記等方法將資料加以整理、摘要、和濃縮，使容易了解其中所含之意義

  例:教育部要了解全國學校總數

  例:老師要了解全班學生成績

- 推論統計：根據對少數人的研究概括多數人可能的情形，以樣本推論母群的性質，研究者真正的興趣在於母群而非樣本，並陳述可能發生的誤差之統計方法。

  例:全市近視學生的比例

  例:國小學生智商

  例:民調

統計學的類別

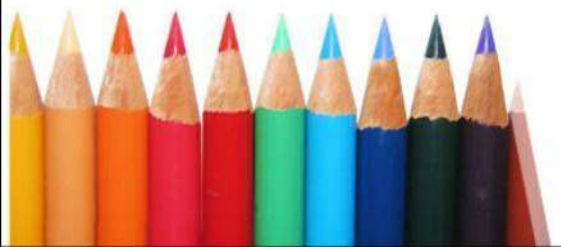
- 實驗設計：在於考驗實驗假設中所列自變數(項)與依變數之間的關係。實驗者操弄自變數以觀察其對依變數所發生的影響。

  例：間歇訓練與連續訓練對百米跑的速度。

統計學的基本概念

- 變異(variety)是統計的根本
  - 科學為研究這些變異與其關聯的活動。
- 變項（variables）VS 常數（constant）
  - 統計學對於變異的探究，主要是藉由變項或變數來落實。
  - 變項是指某一屬性因時地人物不同的內容
  - 常數則是指某一個屬性或現象不因時地人物而有所不同

例：Y=2+x



統計學的基本概念

- 變數及變數的分類
  - 自變數與依變數：不受任何因素影響的前置變項、研究者所操弄的變數叫自變數，因自變數之變化而發生改變的變數是為依變數。
  - 自變數又稱為預測或解釋變數，依變數又稱為結果或反應變數

    例:對紅綠燈(自變數)反應時間(依變數)

    例:不同教學法(自變數)的成效(依變數)

    例:不同跳高姿勢(自變數)：腹滾式、背向式、剪式與跳高高度(依變數)

統計學的基本概念

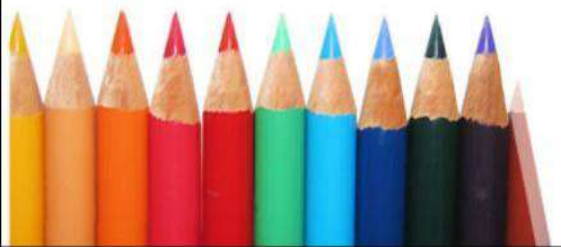
- 變數及變數的分類
  - 連續變數與間斷變數
  - 被測量的對象在變項的數值變化上是有限的，數值與數值之間，無法找到更小單位的數值，變數特質為一點稱為間斷變數。

    例：家裡孩子數、選票數、籃球進球數。
  - 被測量的對象其特徵可以被變項中以無限精密的數值來反應。如果技術上允許，數值可以無限切割，變數特質為一連續不斷之系列稱為連續變數，

    例：時間、身高、智商、成績。

例題示範

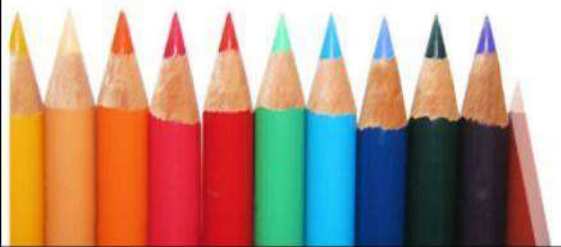
- 傳統教學法、建構教學法、探究教學法對學生數學概念、數學學習態度之比較研究
  - 自變項？
  - 依變項？
- 傳統教學法、建構教學法、探究教學法對不同程度學生（如：低、中、高）之數學概念、數學學習態度之比較研究
  - 自變項？
  - 依變項？



例題示範

- 尋找自變項與依變項

1. 不同教學方法與學生國語成就之比較研究
2. 國民小學資優班教師與普通班教師對家長參與意見之比較研究
3. 高低學習成就學童科學問題解決能力之比較研究



名義變數 次序變數 等距變數 比率變數

- 名義變數：使用數字來辨認事物或類別，無法說明事物與事物差異的大小和形式。例：學生學號、性別、國籍、隊名、球衣號碼。
- 次序變數：依某一特質或次序將團體中的份子加以排列，例：名次(冠軍、亞軍、季軍)、等第、Likert五點量尺(很贊成、贊成、沒意見、不贊成、很不贊成)。

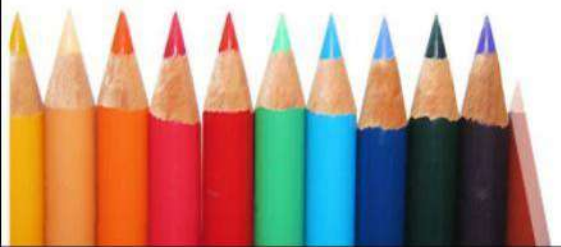
名義變數 次序變數 等距變數 比率變數

- 等距變數：除可說出名稱和排列大小之外還可以算出差別之大小量，例：溫度、籃球 & 排球比賽得分、仰臥起坐次數。
- 比率變數：除可說出名稱和排列大小之外還可以算出差別之大小量，還有絕對的零點，例：身高、立定跳遠距離、跳高高度、跑步速度。

四類變項資料的屬性與特點

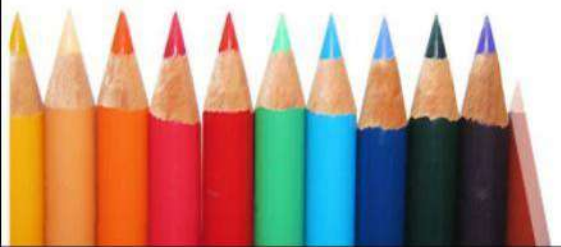
變項種類	變項屬性				變項舉例
	同質性（辨認）	不等性（排序）	可加性（單位相等）	可乘性（絕對零點）	
名義變項	★				性別　學號 血型　國籍
次序變項	★	★			名次　軍階 社經地位
等距變項	★	★	★		溫度　年代 智力
比率變項	★	★	★	★	長度　重量

★代表具有這種性質



例題示範

- 下列的變項資料是屬於測量尺度的哪一類?
  - 名次
  - 智力
  - 閱讀速度
  - 血型
  - 溫度
  - 年代
  - 職業別



例題示範

- 請分類下列個句子描述之資料，屬於名義變數的請填N，如為次序變數填O，如為等距變數填I，如為比率便數則填R。

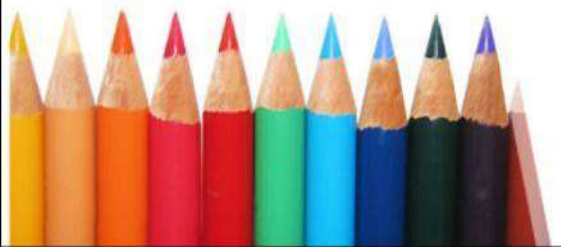
(　) 1. 成績通知單上的名次：甲生第3名，乙生第1名，丙生第2名。

(　) 2. 室溫：理化課室是18℃，音樂課室是23℃，美勞課室是22℃。

(　) 3. 背完九九乘法表的時間數：　甲生是90秒，乙生是120秒，丙生是265秒。

(　) 4. 性別代號：1表示男生，0表示女生。

(　) 5. 體重：甲生是80公斤，乙生是53公斤。



第二章

次數分配表與統計圖

次數分配及圖示法

- 描述統計中最常用來摘述資料的方法就是次數分配及圖示法。當我們蒐集資料，所有未經整理的資料叫原始資料（raw data），為了了解原始資料，我們使用一些方法畫記得知這些資料的次數分配表，由次數分配表可以看出特定的趨勢，進一步的圖示法可以讓資料更是一目了然。次數分配與圖示法可以說是描述統計最基本的工具。

次數分配表

- 等距變數資料：55名學生原始成績

表 2-1　五十五名學生的成就測驗原始分數

59	35	58	57	50	71	62	47	43	68	47
63	41	55	49	63	43	42	45	29	49	53
54	*21	37	40	53	38	57	52	60	54	49
54	40	31	26	47	72	67	50	*79	33	57
48	36	69	50	66	64	56	44	48	58	50

- 55名學生成績次數分配
  1. **決定全距**：全距即數列中最大數值與最小數值之間的差距
  2. **估計組數與決定組距**：組距是指每組大小距離；組數是指全距可以分成幾組組距相等之可能數目。比較適當的組距為為1到20之間，比較適當的組數為：

     $2^k > N$（N為樣本數，k為最佳組數）
  3. **決定每組的上下限**：指各組的界限或範圍值，每一組的最小值稱作下限，最大值稱作上限。

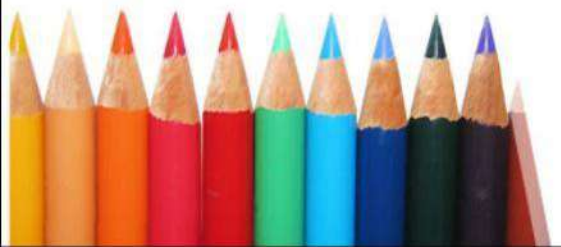
4. **確定組別**：決定真正上限和真正下限，還有組中點（midpoint）

$$\text{組中點} = \frac{\text{真正下限值} + \text{真正上限值}}{2}$$

5. **劃記並計算各組次數**

表 2-2　每組的次數及組中點

分　數	組中點	劃記	次數 (f)	累積次數 (cf)
75～79	77	/	1	55
70～74	72	//	2	54
65～69	67	////	4	52
60～64	62	𝍸	5	48
55～59	57	𝍸 ///	8	43
50～54	52	𝍸 𝍸	10	35
45～49	47	𝍸 ////	9	25
40～44	42	𝍸 //	7	16
35～39	37	////	4	9
30～34	32	//	2	5
25～29	27	//	2	3
20～24	22	/	1	1
			$N=55$	



次數分配表

- 名義變數或次序變數的資料

表 2-3　某國小一年級學生患一般兒童疾病的次數分配

疾病名稱	次數 (f)	百分比 (%)
砂　眼	29	14.5
感　冒	58	29.0
白　癬	34	17.0
扁桃腺腫	5	2.5
牙　痛	36	18.0
胃腸病	21	10.5
其　他	17	8.5
合計	$N=200$	100.0

表 2-4　五十名國中一年級學生的作文成績次數分配

等　第	學生數 (f)	百分比 (%)
甲	9	18
乙	23	46
丙	14	28
丁	3	6
戊	1	2
	50	100

圖示法-多邊圖(polygon)

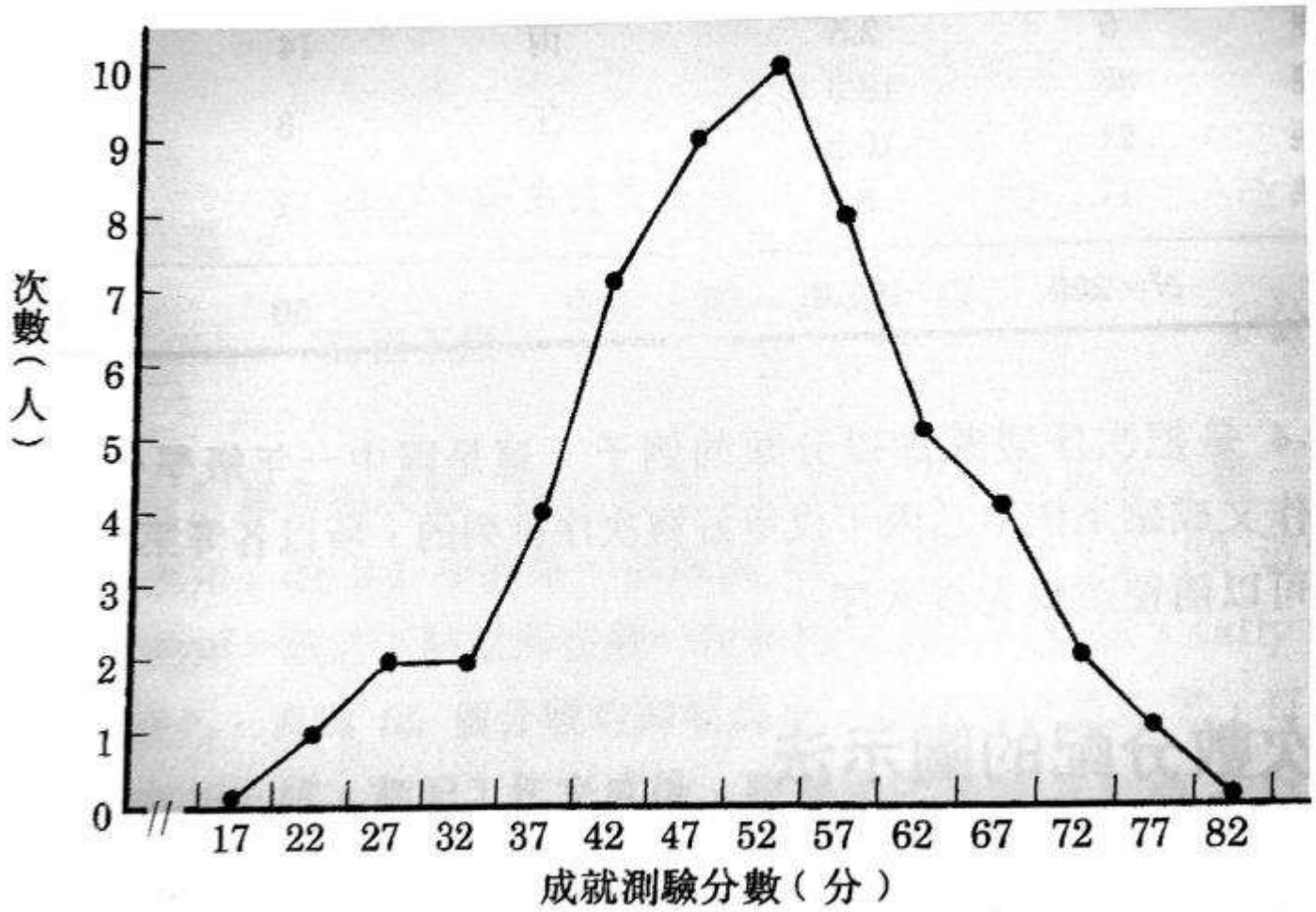


圖 2-2　五十五名學生成就測驗分數之次數分配多邊圖

圖示法-直方圖（Histogram）

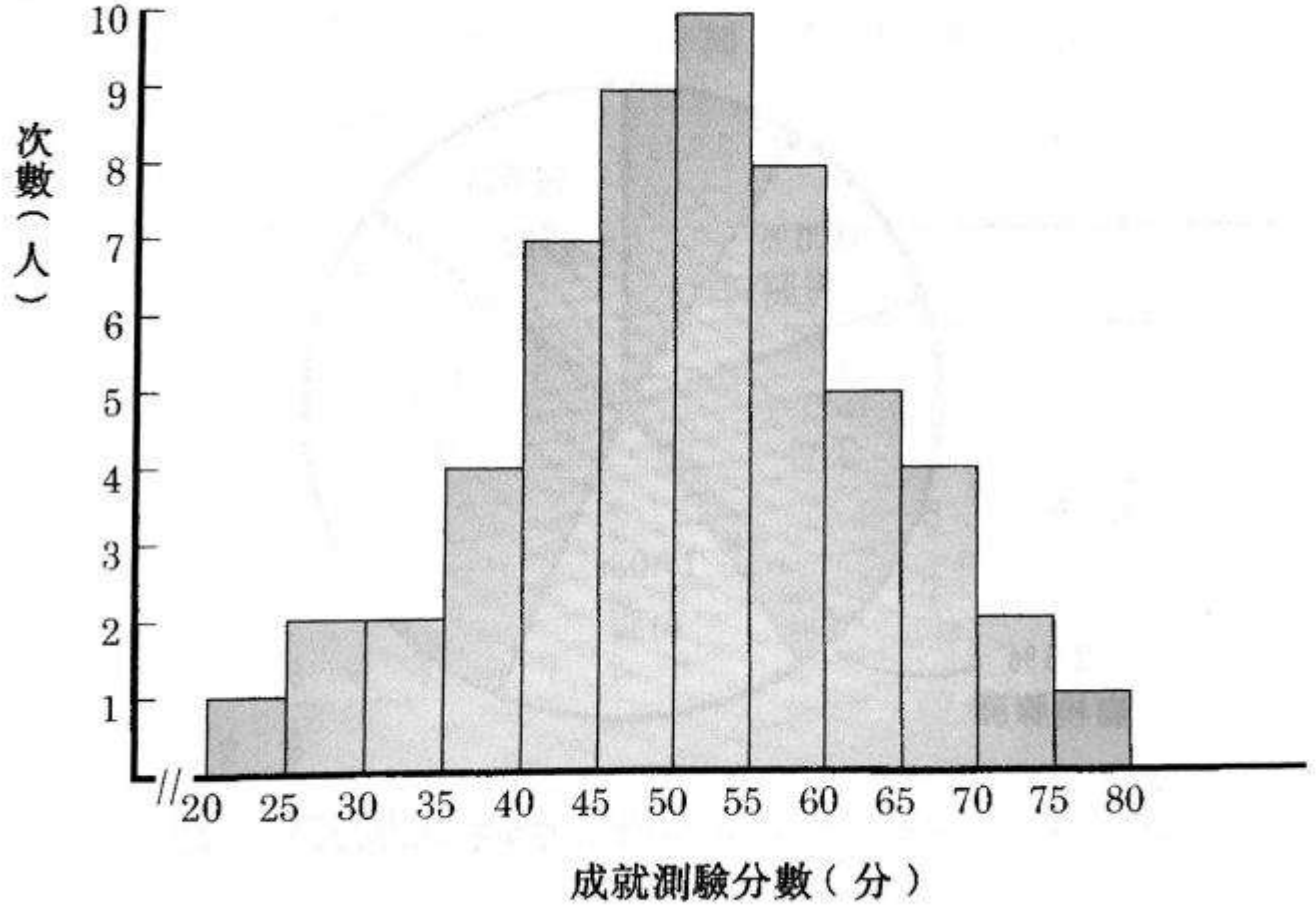


圖 2-3　五十五名學生成就測驗分數的次數分配直方圖

圖示法-多邊圖和直方圖

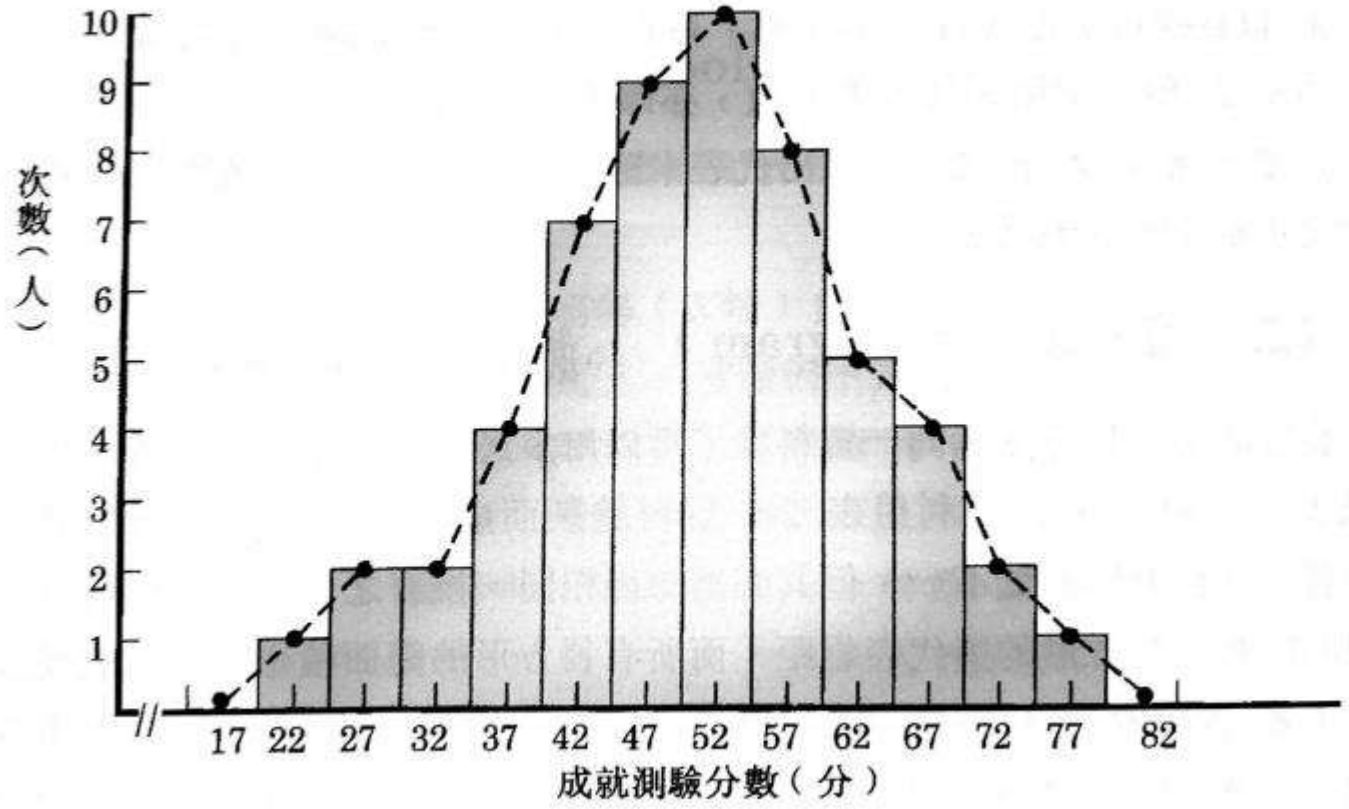


圖 2-4　五十五名學生成就測驗分數的次數分配直方圖與多邊圖

圖示法-肩形曲線

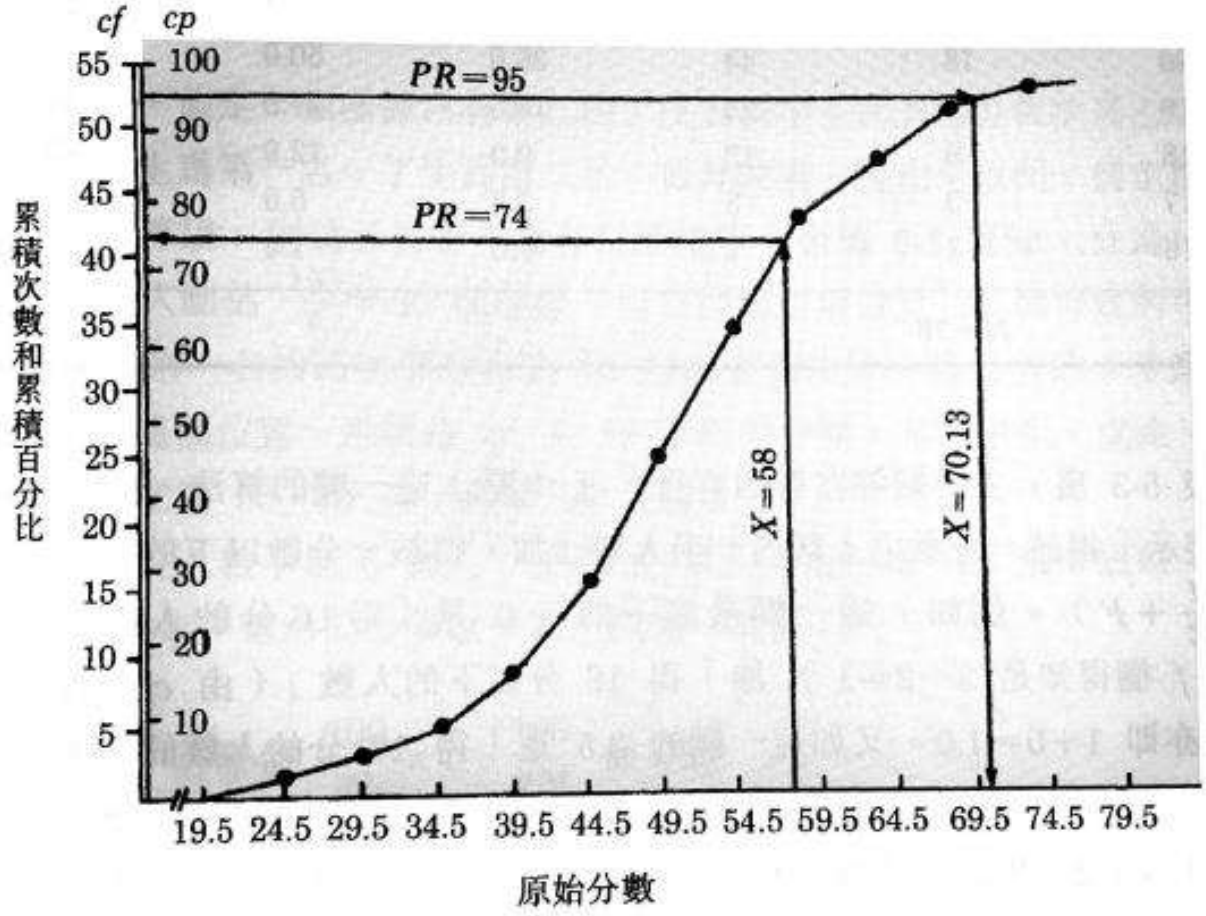


圖 5-1　累積百分比曲線（根據表 5-1）

圖示法-圓形比例圖(Pie chart)

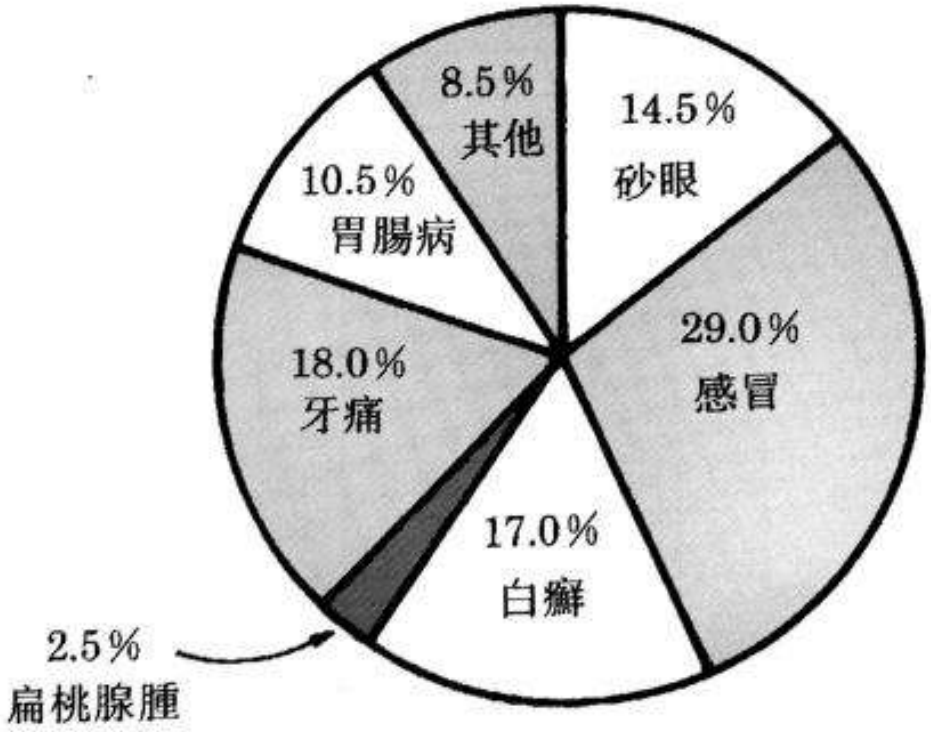


圖 2-5　某國小一年級兒童七類疾病的圓形比例圖

圖示法–莖葉圖

莖	葉
2	1 6 9
3	1 3 5 6 7 8
4	0 0 1 2 3 3 4 5 7 7 7 8 8 9 9 9
5	0 0 0 0 2 3 3 4 4 4 5 6 7 7 7 8 8 9
6	0 2 3 3 4 6 7 8 9
7	1 2 9

圖 2-6　五十五名學生成就測驗原始分數(表2-1)的莖葉圖

SPSS製作的次數分配表

AGEGROUP 年齡分組

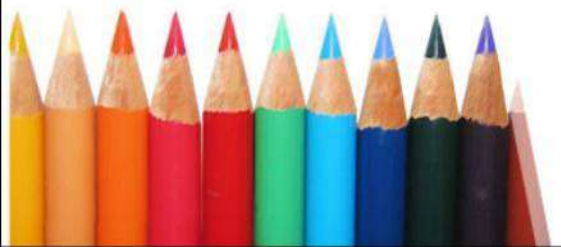
			次數	%	有效%	累積%
有效的	1	20歲以下	2	.1	.2	.2
	2	20-24.99歲	112	8.1	8.4	8.6
	3	25-29.99歲	230	16.5	17.3	25.9
	4	30-34.99歲	148	10.6	11.1	37.0
	5	35-39.99歲	118	8.5	8.9	45.9
	6	40-49.99歲	390	28.0	29.3	75.2
	7	50-59.99歲	273	19.6	20.5	95.8
	8	60歲以上	56	4.0	4.2	100.0
		總和	1329	95.5	100.0	
遺漏值	9		62	4.5		
總和			1391	100.0		

次數分配

有效%分配

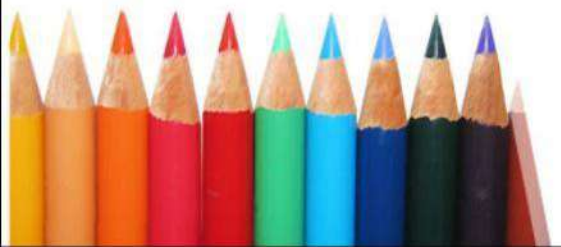
百分比分配

累積百分比分配



次數分配各相關名詞

- 次數分配（frequency distribution）：
  由某個變項各數值（各組）的次數所組成的分配，如前表的第一欄。
- 相對次數分配（relative frequency distribution）：
  由某個變項各數值（各組）的次數除以總數（稱為相對次數）所組成的分配。如果把相對次數乘以100%，即為百分比分配，如前表的第二欄。
- 有效百分比分配（valid percentage frequency distribution）：
  由某個變項各數值（各組）次數除以總數扣除遺漏值的次數乘以100%後的分配，如前表的第三欄。（在沒有遺漏值的情況下，有效百分比分配等於百分比分配）
- 累積次數分配（cumulative frequency distribution）：
  由某個變項各數值（各組）的次數往上或往下累計所組成的分配。
- 累積相對次數分配（cumulative relative frequency distribution）：
  由某個變項各數值（各組）的次數除以總數，以往上或往下累計所組成的分配。如果把相對次數乘以100%後再累計，即為累積百分比分配，如前表的第四欄。

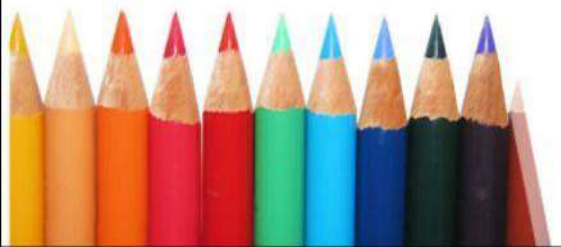


例題示範

試劃出某班48同學立定跳遠的次數分配圖。

- 由小至大排列

152	196	227	250	276
165	200	230	253	288
172	203	235	254	294
174	203	237	257	295
180	208	238	263	300
185	217	243	265	308
187	218	245	266	315
189	222	245	269	325
192	225	247	270	
194	226	248	274	



1. 決定全距

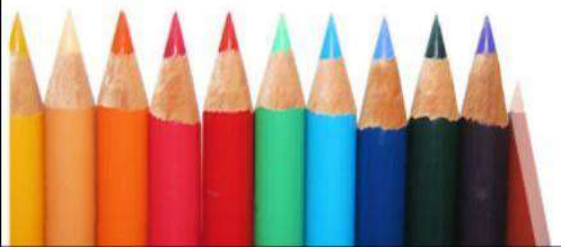
全距＝最大值－最小值

325－152＝173

2. 估計組數和組距

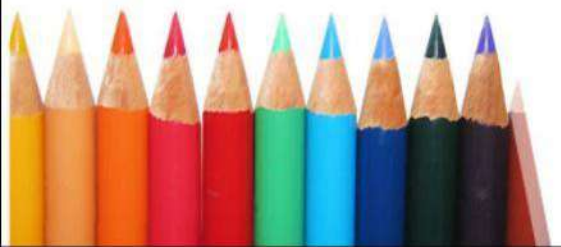
通常以5至15組較適宜，此例以20公分為組距。

組數＝173／20＝8.65……可分為9組



3. 決定每組的上下限

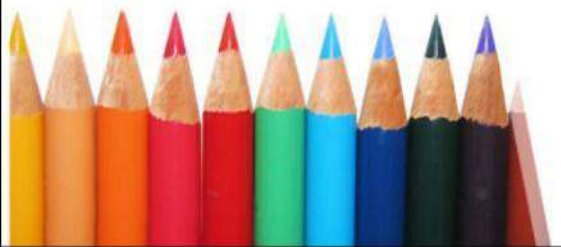
組別	上下限	組中點	劃記	次數	累積次數
1	151－170				
2	171－190				
3	191－210				
4	211－230				
5	231－250				
6	251－270				
7	271－290				
8	291－310				
9	311－330				



4. 確定組別

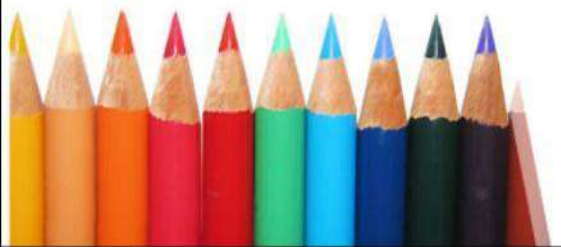
$$\text{組中點}=\frac{\text{真正下限}+\text{真正上限}}{2}$$

組別	上下限	組中點	劃記	次數	累積次數
1	151－170	160.5	//		
2	171－190	180.5	~~////~~ /		
3	191－210	200.5	~~////~~ //		
4	211－230	220.5			
5	231－250	240.5			
6	251－270	260.5			
7	271－290	280.5			
8	291－310	300.5			
9	311－330	320.5			



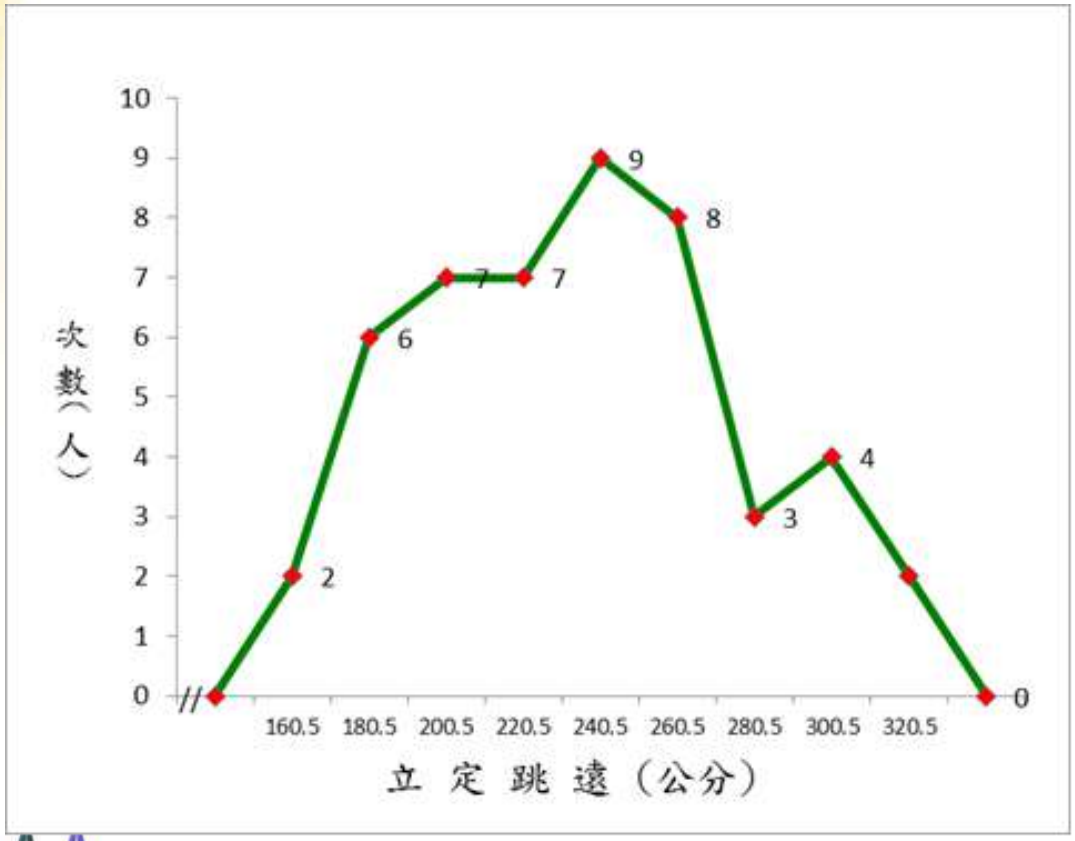
5. 劃記並計算各組次數

組別	上下限	組中點	劃記	次數	累積次數
1	151－170	160.5	//	2	2
2	171－190	180.5	~~////~~ /	6	8
3	191－210	200.5	~~////~~ //	7	15
4	211－230	220.5	~~////~~ //	7	22
5	231－250	240.5	~~////~~ ////	9	31
6	251－270	260.5	~~////~~ ///	8	39
7	271－290	280.5	///	3	42
8	291－310	300.5	////	4	46
9	311－330	320.5	//	2	48



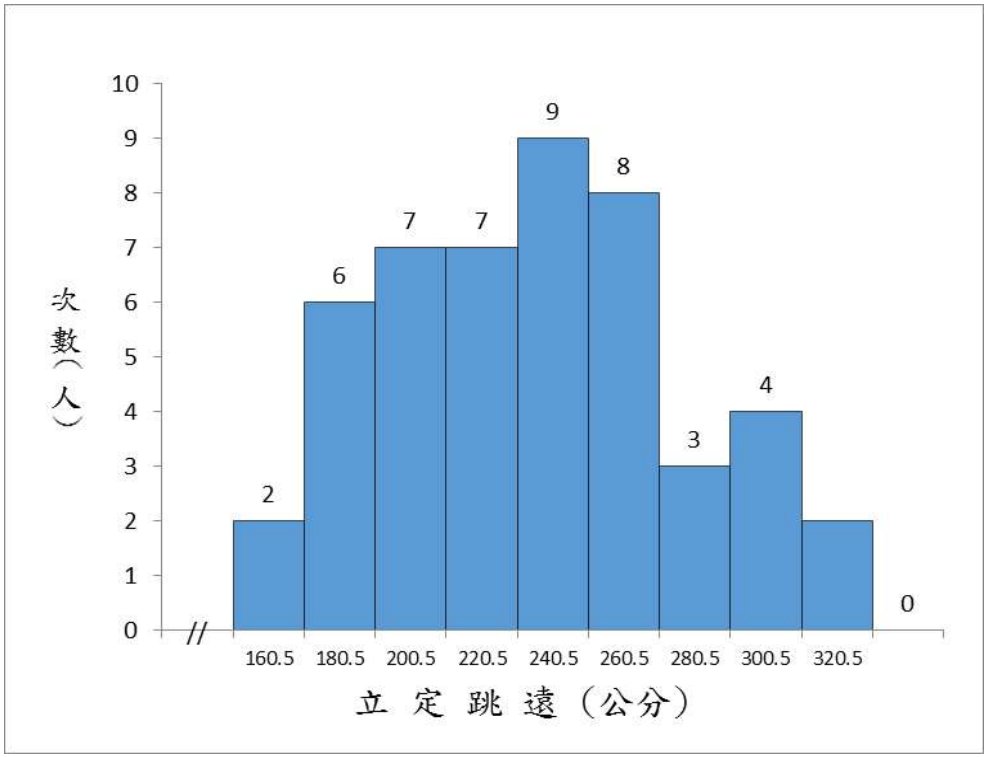
6. 劃出次數分配圖

- 多邊圖(折線圖)



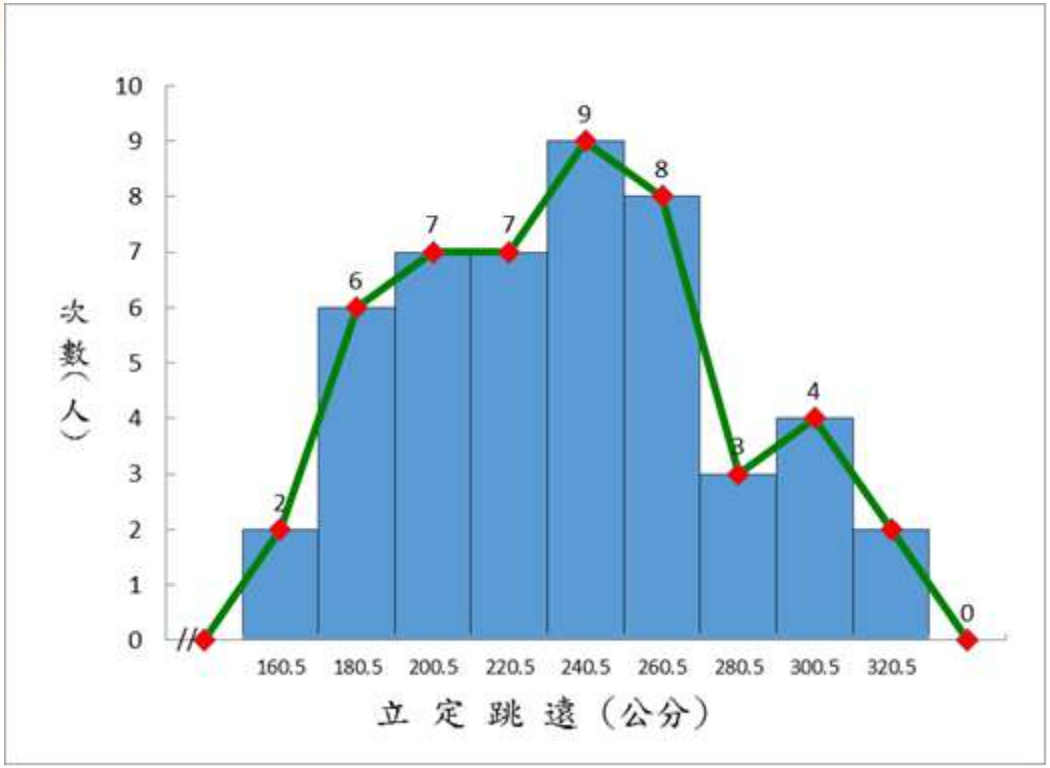
本班立定跳遠分佈圖

- 直方圖



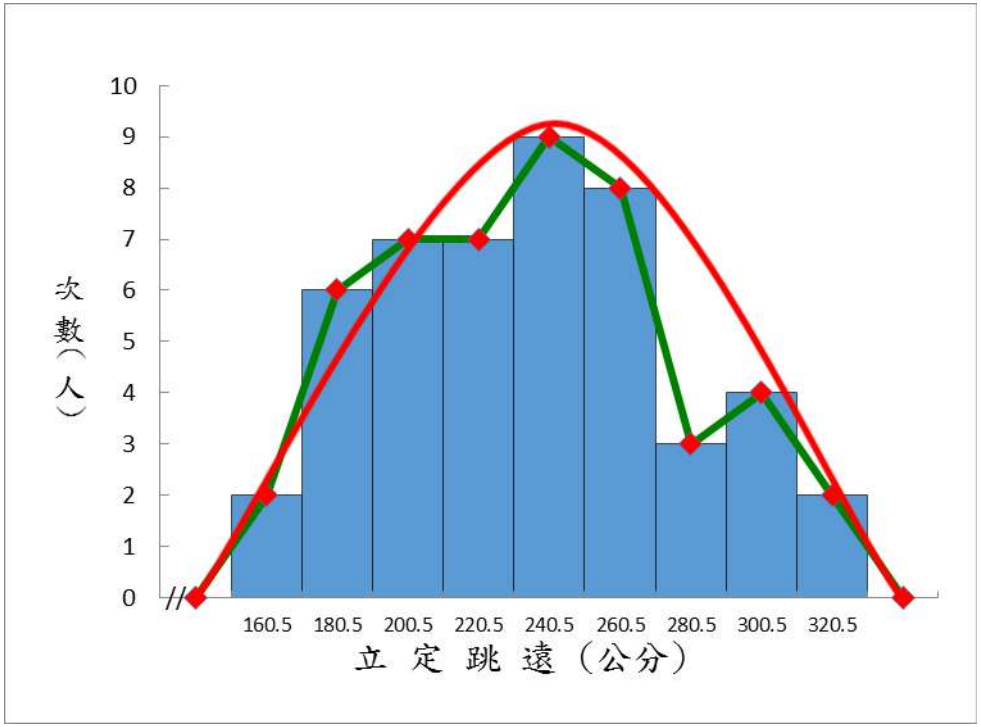
本班立定跳遠分佈圖

- 直方圖



本班立定跳遠分佈圖

- 多邊圖(折線圖)+ 直方圖+常態分佈曲線



本班立定跳遠分佈圖

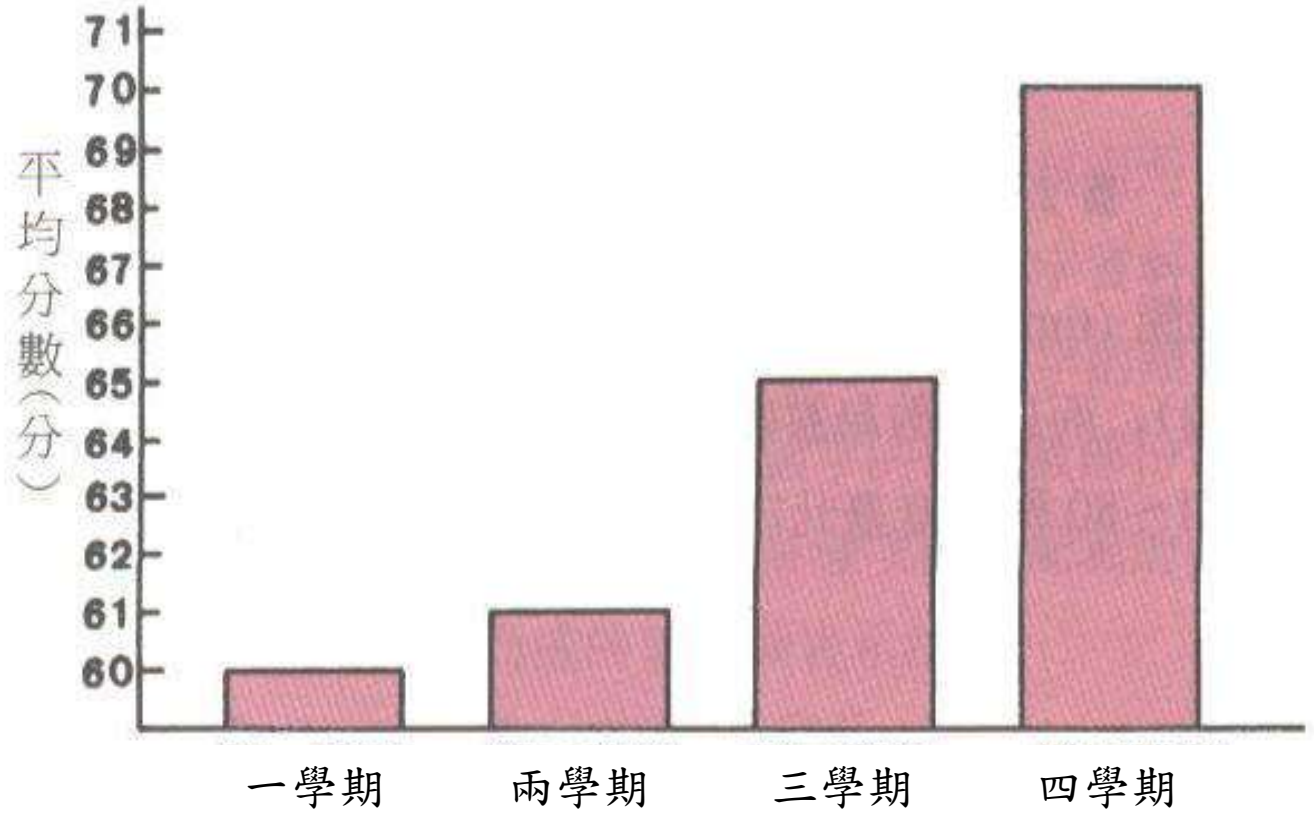
製作統計圖表的須知

防止以下可能發生的錯誤

1. 縱軸或橫軸未能由原點開始畫起，卻又未標示清楚缺口的位置所在。
2. 縱軸或橫軸長度刻意變大，不成黃金比例分割。
3. 以圓的直徑來表示大小。
4. 未標示出各軸的名稱和刻度。

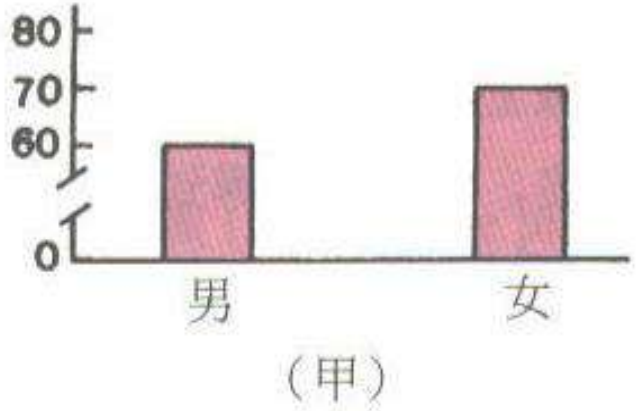
錯誤一：

縱軸或橫軸未能由原點開始畫起，又未標示清楚缺口的位置所在。

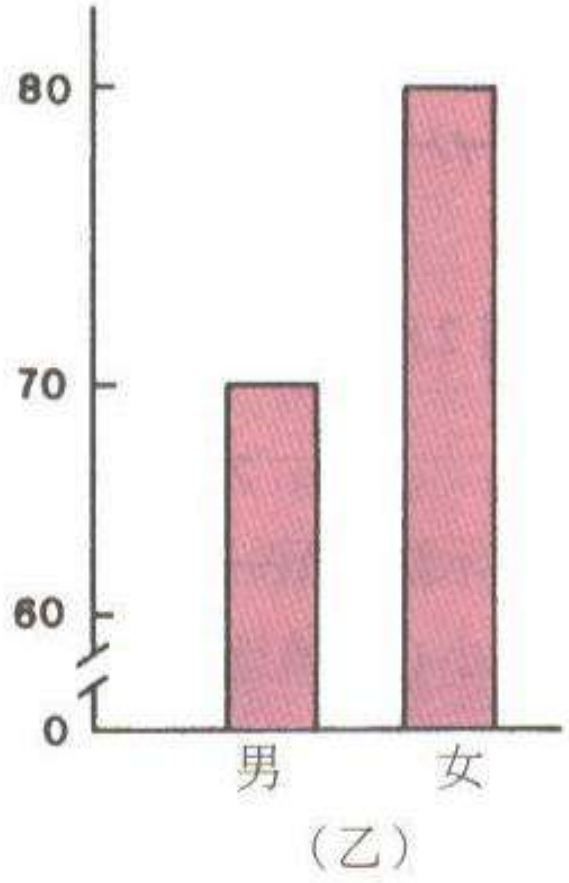


錯誤二：

縱軸或橫軸長度刻意變大，不成黃金比例分割。



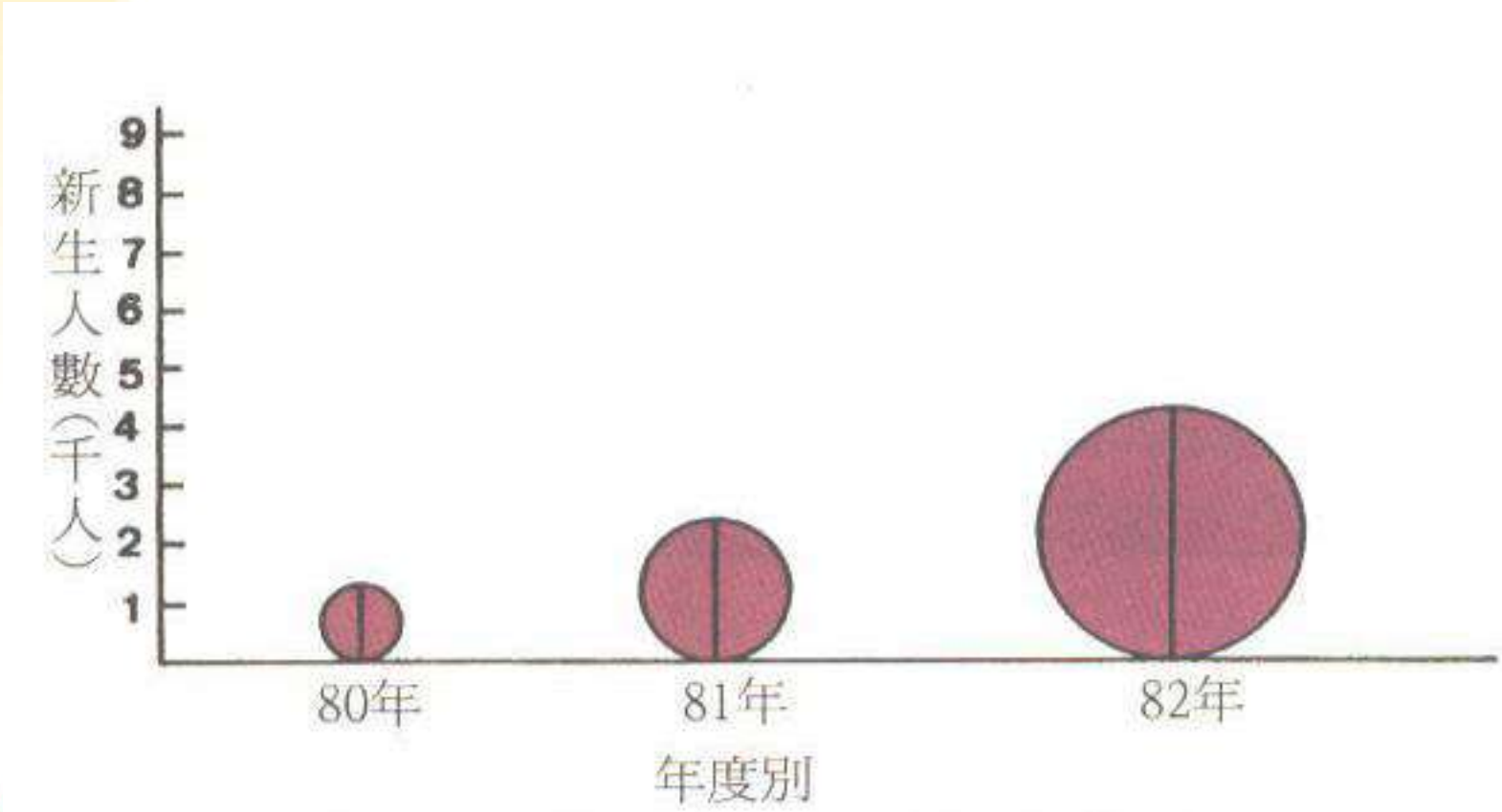
（甲）



（乙）

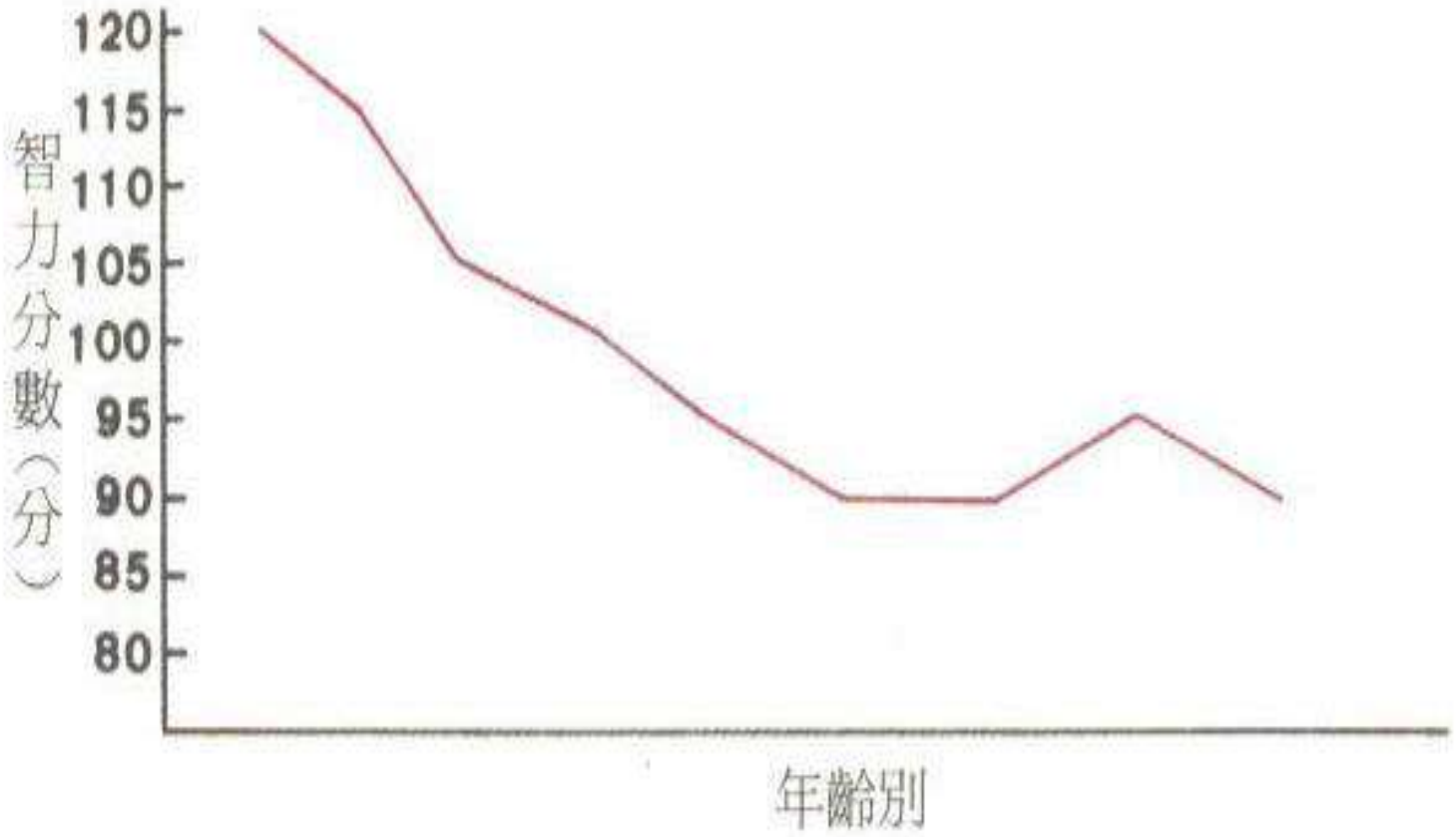
錯誤三：

以圓的直徑來表示大小。



錯誤四：

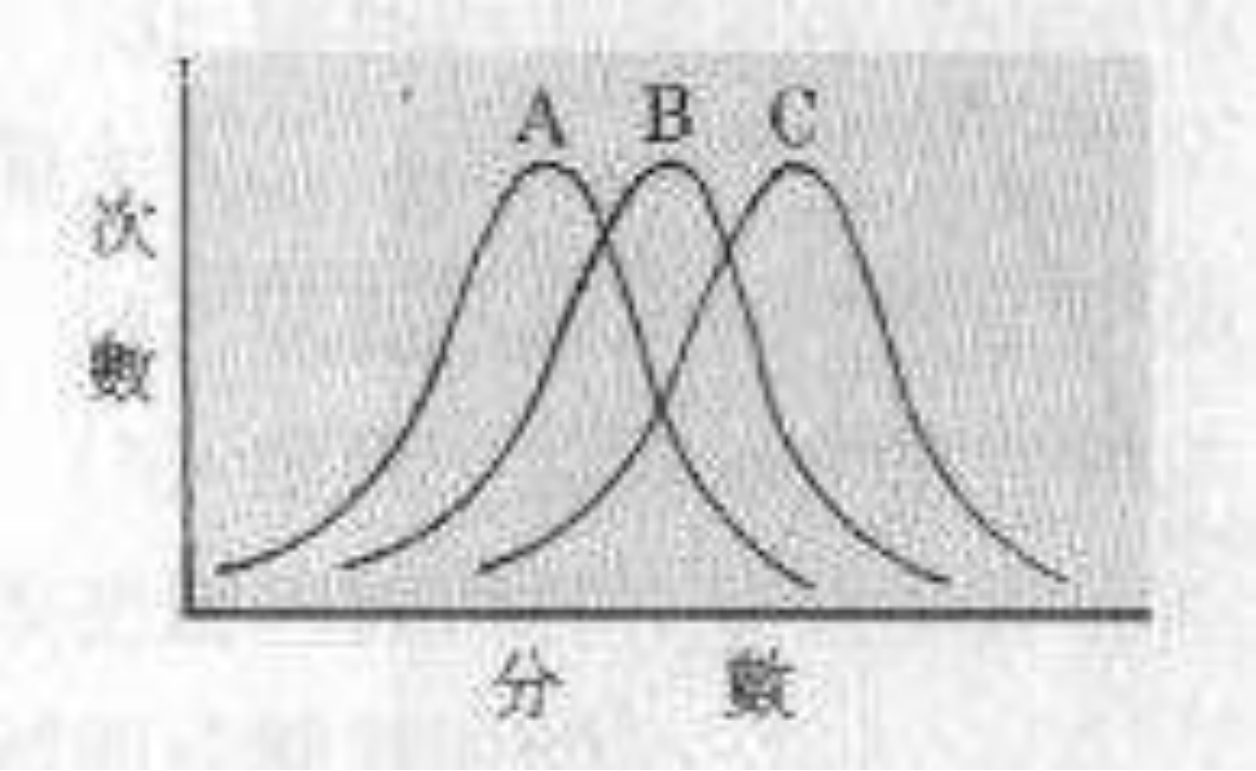
未標示出各軸的名稱和刻度。



比較

中央趨勢(central tendance)不同

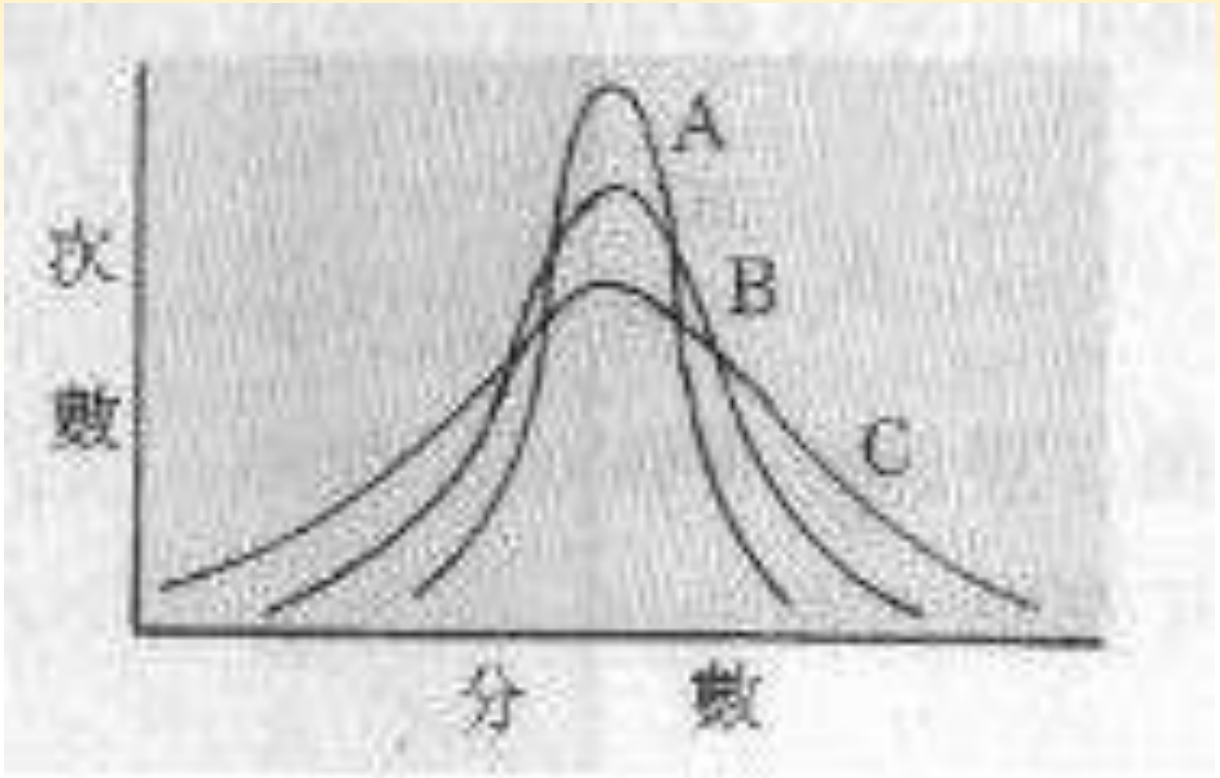
分散情形相同



平均數不同：C>B>A

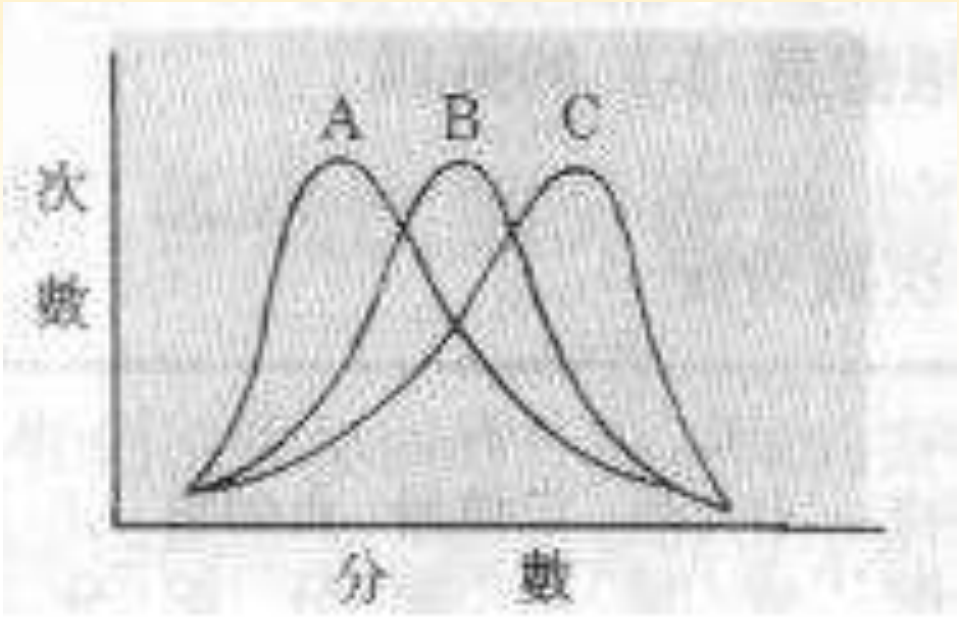
比較

分散情形不同(集中情形相同)



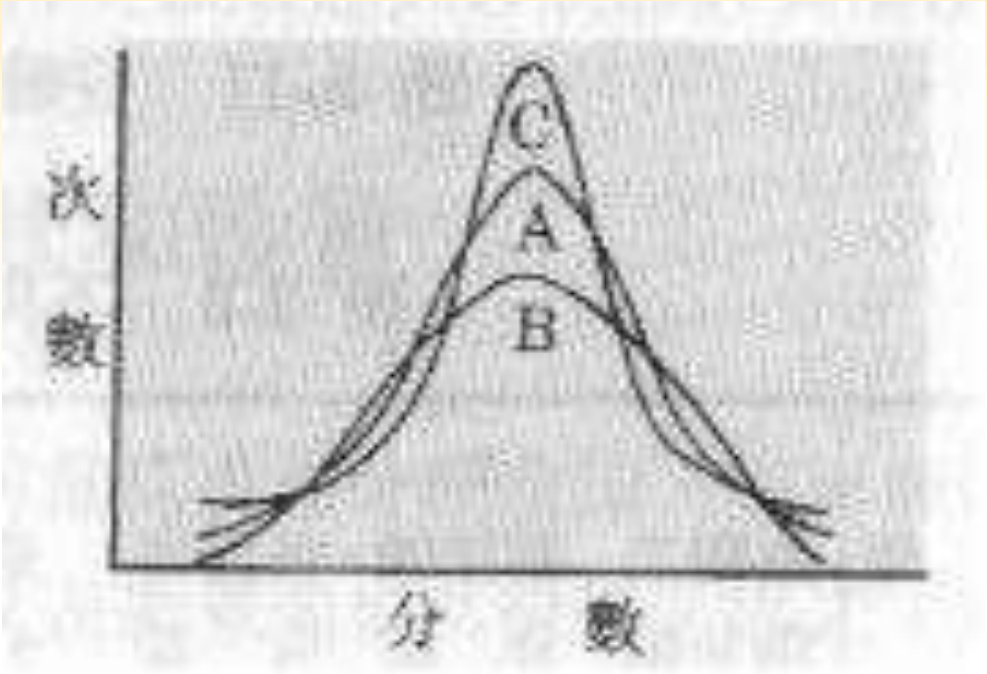
平均數相同，A最整齊、B次之、C最不整齊。

比較
偏態不同



A為正偏態，大部分得低分；C為負偏態，大部分得高分。

比較
峰度不同



- 得分等於平均數以C最多、A次之、B最少。
- C為高狹峰，B為低闊峰。
- 偏態與峰度在±2之間表示仍呈常態分配

第三章

集中量數

單一變項的資料描述－集中數量

- 數字描述式的測量經常被我們用來描述一些圖表或是一些現象，最常見的數字描述式的測量方式為集中數量的測量與變異量數的測量。
- 集中數量的意義：用來觀察數值集中的情形，一級分配中央的測量。
- 集中數量的類別：
  - 眾數(mode)：次數出現最多的數值。
  - 中數(median)：數值中最中間的數值。
  - 平均數(mean)：觀察值得總和除以總人數。

集中數量- 平均數(Mean，μ)

- 團體中每一個數都會影響到平均數，任何一數值變化，平均數會隨之變化，如果沒有極端分數，平均數最能代表團體中的集中趨勢。
- 母體資料得出的平均數以μ表示，樣本資料得出的平均數以　表示　$\bar{X}$
- 平均數適用於等距或比率變數。

算術平均數的算法 $\mu = \frac{\sum X}{N}$

$$\mu = \frac{X_1+X_2+X_3+\cdots+X_N}{N}$$

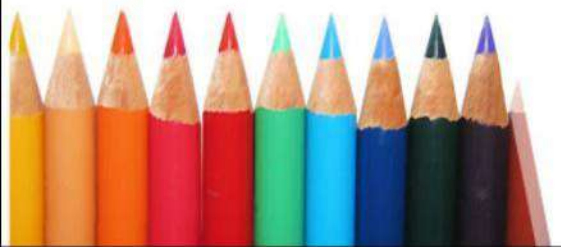
加權平均數的算法 $\mu = \frac{\sum \omega_i X_i}{\sum \omega_i}$

- 算術平均數簡捷法

組別	上下限	組中點	X-160.5	x'=(X-160.5)/20	次數	fx'
1	151－170	160.5	0	0	2	0
2	171－190	180.5	20	1	6	6
3	191－210	200.5	40	2	7	14
4	211－230	220.5	60	3	7	21
5	231－250	240.5	80	4	9	36
6	251－270	260.5	100	5	8	40
7	271－290	280.5	120	6	3	18
8	291－310	300.5	140	7	4	28
9	311－330	320.5	160	8	2	16
					N=48	179

$$\mu = \left(\frac{\sum fx'}{N}\right) * 20 + 160.5$$

$$= \left(\frac{179}{48}\right) * 20 + 160.5$$



平均數的特徵

- $\sum(X-\mu)=0$
- $\frac{\sum(X\pm C)}{N}=\mu\pm C$
- $\frac{\sum CX}{N}=C\mu$
- 如果我們以算數平均數取代團體中任何一個分數則我們所獲得該次分數分配的測量誤差（measurement errors）的平方和，將會是最小。

$$\frac{(X_1-Y_1)+(X_2-Y_2)+\ldots+(X_N-Y_N)}{N}=\mu_X-\mu_Y$$

中位數(Median，Md)

- 中位數為某依次數分配的中點，該點上下佔總次數50%，中位數不受極端分數的影響，若團體有極端分數使平均數受很大影響而失去代表性，此時應使用中數。
- 一列人中間那一個人所得的分數，百分等級為50的百分位數（P50）或第二四分位數（Q2; second quartile）。
- 中位數適用於次序、等距或比率變數。

中位數的算法──未歸類時

例3-2：甲乙丙丁戊五隻老鼠跑完某一迷津之時間依次為27，190，25，43和64秒，問中位數為多少？

Ans：

自快至慢依次為丙甲丁戊乙，亦即25、27、43、64、190秒。故中位數是丁鼠的分數：43秒。

所以Md＝43.00（秒）。

- N是奇數時，以第 $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ 個人的分數為中位數。
- N為偶數時，以第 $\frac{N}{2}$ 個人和第個 $\left(\frac{N}{2}+1\right)$ 人所得的分數之平均數來作為中位數。

中位數的算法—歸類時

- $\mathrm{Md} = l + \left(\dfrac{\frac{N}{2} - F}{f_{md}} \right) h$

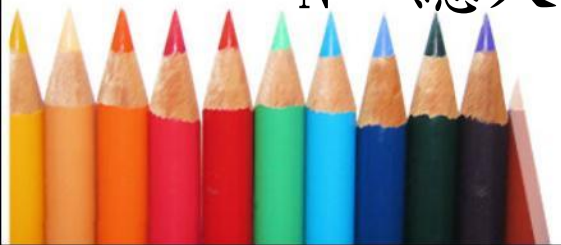
L＝中數所在組的真正下限

F＝中數所在組以下的累積次數

f_{md}＝中數所在組的次數

h＝組距

N＝總人數



$$Md = 49.5 + \left(\frac{\frac{55}{2} - 25}{10} \right) \times 5$$

$$= 50.75\ (分)$$

組 別	f	cf
75~79	1	55
70~74	2	54
65~69	4	52
60~64	5	48
55~59	8	43
50~54	10	35
45~49	9	25
40~44	7	16
35~39	4	9
30~34	2	5
25~29	2	3
20~24	1	1
N＝55		

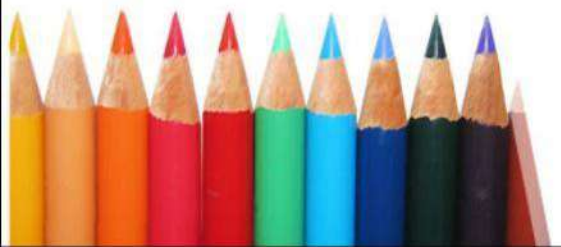
眾數(Mode，Mo)

- 眾數是最明顯的集中量數，次數最多的值，是類別變數最典型的統計方式，若要很快而大略知道一個團體中的集中趨勢可用眾數，但是當次數分配不規則或無明顯的集中趨勢，眾數及喪失意義。
- 一個分配有兩個分數具有相同的最高次數(雙眾數)，稱為雙峰分配(bimodal distribution)
- 眾數適用於類別、次序、等距或比率變數。

未歸類時

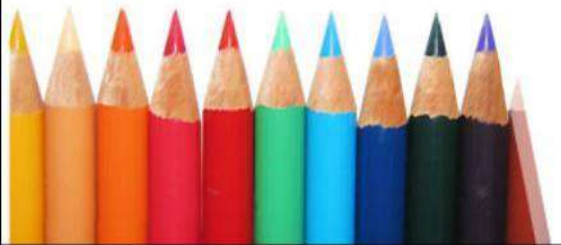
- 雙眾數：203、245

152	196	227	250	276
165	200	230	253	288
172	203	235	254	294
174	203	237	257	295
180	208	238	263	300
185	217	243	265	308
187	218	245	266	315
189	222	245	269	325
192	225	247	270	
194	226	248	274	



集中量數的特性與優缺點比較

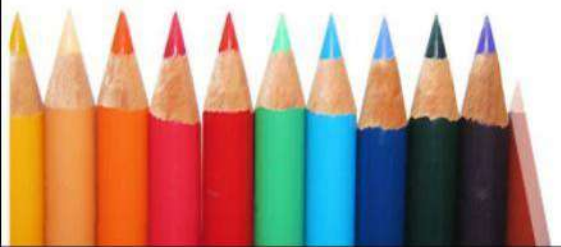
測量層次	集中量數		
	眾數	中位數	平均數
名義	V		
順序	V	V	
等距／比率	V	V	V
優點	不受偏離值的影響；計算方法簡便。	對數值變化不敏感；較不受極端值影響；計算方法尚稱簡便。	測量最為精密，考慮到每一個樣本，具有代表性，適合代數運算。
缺點	測量過於粗糙，無法反應所有樣本。	無法反應所有樣本的狀況。	易受到偏離極端值的影響。

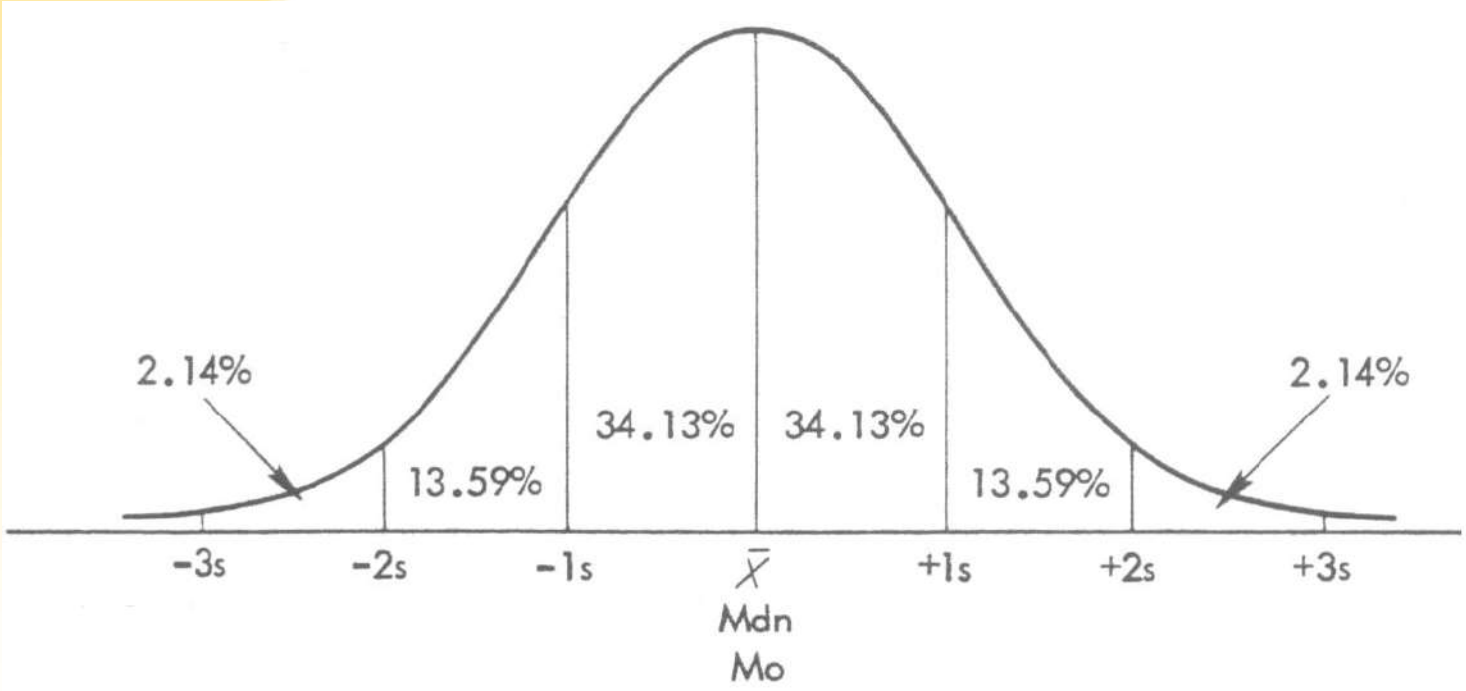


例題示範

- 一藥廠開發了兩種新藥，給予10位受試者食用，以下數據為食用新藥幾天後死亡，試問，此數據適合以中位數還是平均數分析？

新藥一	新藥二
1	1
2	2
3	3
4	4
5	20





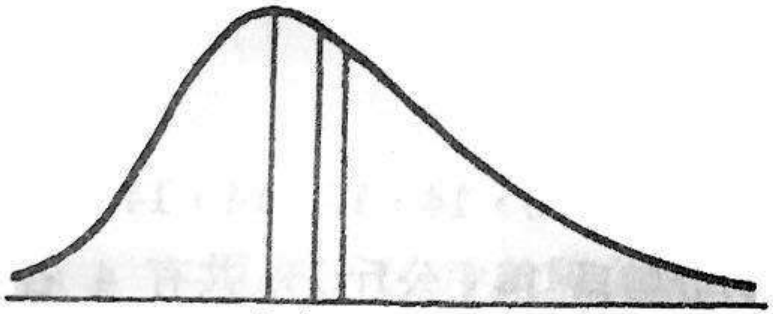
平均數

中位數

眾數

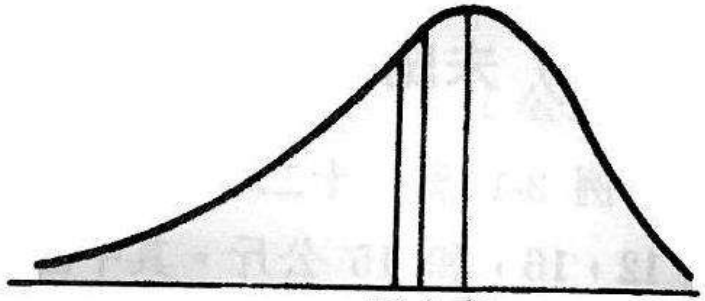
常態分配曲線

$M = Md = Mo$



衆中平
位均
數數數

(A)正偏態時



平中衆
均位
數數數

(B)負偏態時

集中量數的討論

- 在單峰且對稱（unimodal and symmetric）的分配中，此時的算數平均數、中位數和眾數都會相等。但在僅僅是對稱的分配中，則只有算數平均數和中位數相等。在偏態的分配裡，中位數是坐落在算數平均數和眾數之間，但是通常比較靠近算數平均數的一端。

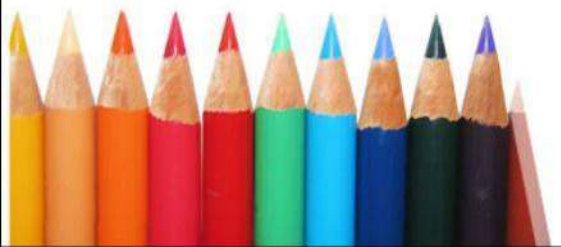
例題示範

- 某次數分配的最小值為41，已知組距為5，則第一組範圍最好是多少？

  (1)40-44 (2)41-45 (3)37-41 (4)36-40

- 當使用名義變項時，何種統計圖較適當？

  (1)直方圖 (2)多邊圖 (3)長條圖 (4)莖葉圖

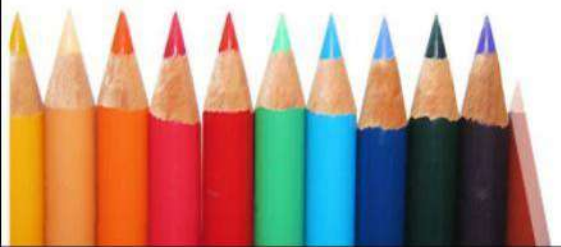


例題示範

- 已知

X	Y
9	3
8	4
5	6
6	3

1. 試算 ΣX＝？
2. 試算 ΣY＝？
3. 試算 $\Sigma X \cdot \Sigma Y$＝？
4. 試算 ΣXY＝？



例題示範

- 以下列年齡分配，回答1～5：

  62 76 88 25 70 38 66 63 54 85 29 72 64 72 49 50 65 66 59 42

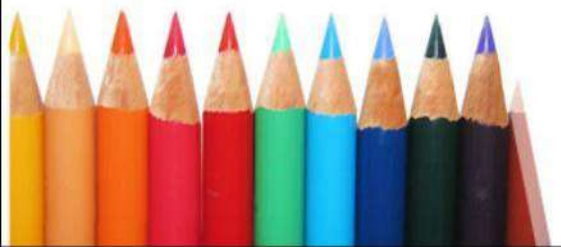
  76 88 48 76 87 41 74 42 37 94 58 55 40 63 92 86 52 31 62 75

  - 求「全距」=？
  - 製作「次數分配表」。使用「組距」為5，決定：

  （1）組別（2）各組次數（3）真實上下限（4）組中點

  （5）累計次數（6）累計百分比

  - 製作次數分配直方圖及多邊圖。
  - 描述次數分配圖形的形狀。
  - 製作次數分配莖葉圖及肩形圖（累計次數多邊圖）。

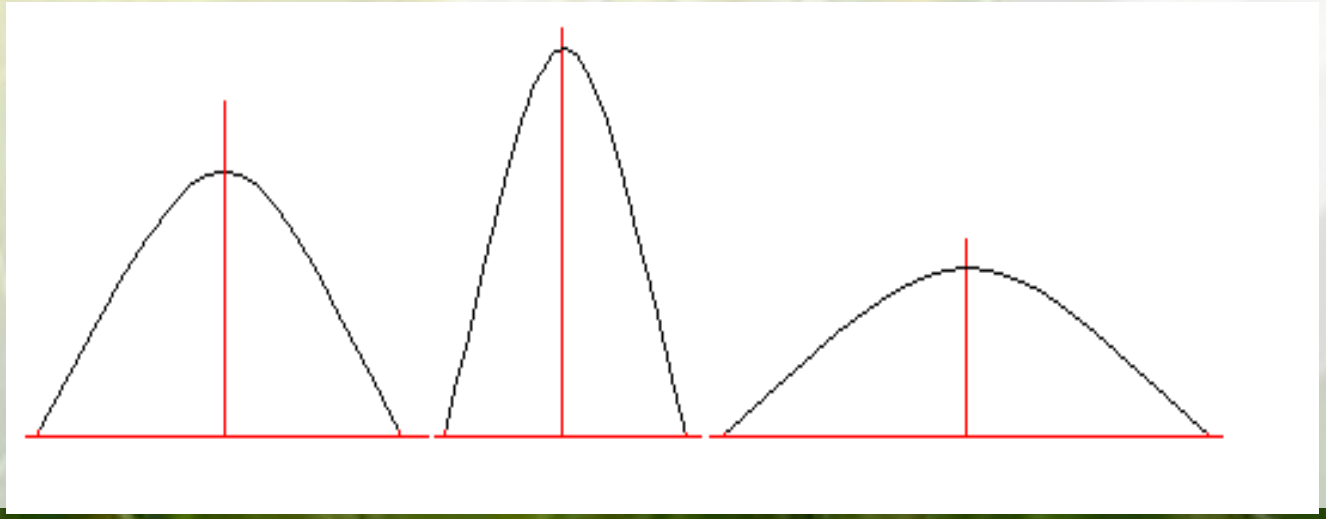


第四章

變異量數

單一變項的資料描述－變異數量

- 變異數量的意義：以集中量數來描述單一變項時，還是無法完全了解整個分配的性質。有時各分配的平均數完全一樣，但實質上分配的情形可能差異甚大，主要是分散情形不同。變異數量就是用來表示，團體中各分數之分散情形的統計數。



單一變項的資料描述－變異數量

- 變異數量的種類
  - 全距：所有觀察值中最大值與最小值之差。
  - 平均差：各數值與平均數之間的平均距離。

$$AD = \frac{\sum |X - \mu|}{N}$$

  - 變異數：所有觀察值與平均數的差的平方和除以觀察個數

$$\sigma^2 = \frac{\sum (X - \mu)^2}{N} = \frac{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}}{N}$$

離均差平方和：

$$SS = \sum (X - \mu)^2 = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}$$

變異數：

$$\sigma^2 = \frac{\sum (X - \mu)^2}{N} = \frac{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}}{N}$$

標準差：

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (X - \mu)^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}}{N}}$$

七名學生測驗得分之平均數及平均差

學生	X	x	$\|x\|$
A	16	7	7
B	12	3	3
C	11	2	2
D	9	0	0
E	8	-1	1
F	4	-5	5
G	3	-6	6
N=7	63	0	24

$$\mu = \frac{63}{7} = 9.00$$

$$AD = \frac{\Sigma|X - \mu|}{N}$$

$$= \frac{24}{7} = 3.43$$

七名學生測驗得分之
離均差平方和、變異數及標準差

$$\mu = \frac{\sum X}{N} = \frac{63}{7} = 9.00$$

$$SS = \sum (X - \mu)^2 = \sum X^2 = 124$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (X - \mu)^2}{N} = \frac{\sum X^2}{N} = \frac{124}{7} = 17.71$$

$$SD = \sqrt{\frac{\sum (X - \mu)^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N}} = 4.21$$

離均差平方和、變異數及標準差的幾何意義

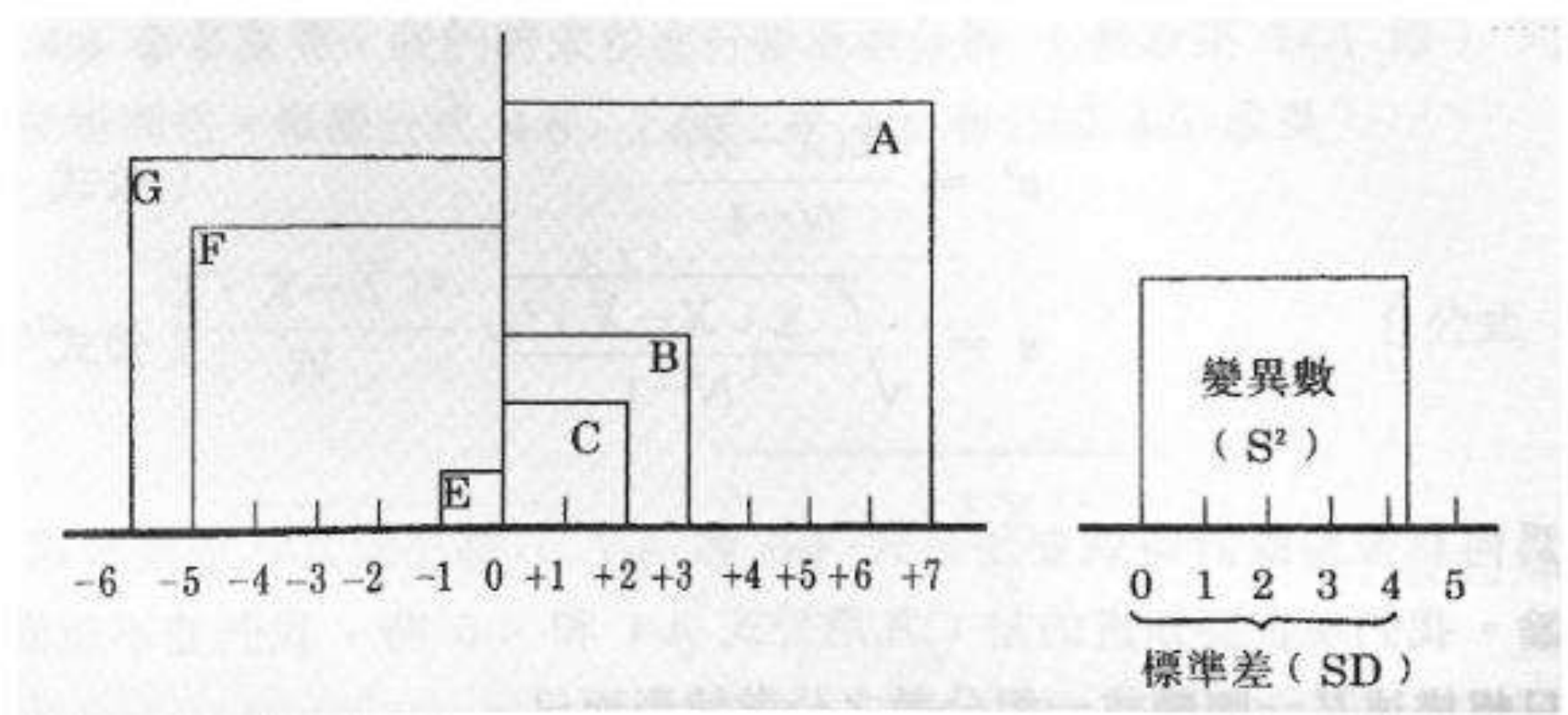


圖　離均差平方和、變異數以及標準差的關係
（參看Guilford, 1965, p.74）

變異數的特性

1. 團體中各分數都加減一常數C，變異數不變。
2. 團體中各分數都乘一常數C，則新的變異數會是原變異數的C^2倍。
3. 團體中各分數都除以一常數C，則新的變異數會是原變異數的$1 / C^2$倍。
4. 當使用平均數作為集中量數時，應使用標準差作為其相對應的變異量數。
5. S^2或SD越大，X離$\bar{X}$越大，表示該團體在該一特質越不整齊

計算變異數（一）

X	X^2	$(X+c)$	$(X+c)^2$
12	144	12+5=17	289
8	64	8+5=13	169
8	64	8+5=13	169
5	25	5+5=10	100
4	16	4+5= 9	81
3	9	3+5= 8	64
2	4	2+5= 7	49
42	**326**	**77**	**921**

$$\mu = \frac{42}{7} = 6$$

$$\mu_{(x+c)} = \frac{77}{7} = 11 = 6+5$$

$$\sigma^2_x = \frac{326 - \frac{(42)^2}{7}}{7} = 10.57$$

$$\sigma^2_{(x+c)} = \frac{921 - \frac{(77)^2}{7}}{7} = 10.57$$

- 團體中各分數都加減一常數C，變異數不變。

計算變異數（二）

X	X^2	(cX)	$(cX)^2$
12	144	$5\times12=60$	3600
8	64	$5\times\ 8=40$	1600
8	64	$5\times\ 8=40$	1600
5	25	$5\times\ 5=25$	625
4	16	$5\times\ 4=20$	400
3	9	$5\times\ 3=15$	225
2	4	$5\times\ 2=10$	100
42	**326**	**210**	**8150**

$$\mu = 6$$

$$\mu_{cx} = \frac{210}{7} = 6\times5$$

$$\sigma^2_x = \frac{326-\frac{(42)^2}{7}}{7} = \frac{74}{7} = 10.57$$

$$\sigma^2_{cx} = \frac{8150-\frac{(210)^2}{7}}{7} = \frac{1850}{7}$$

$$= \frac{74}{7}\times25 = 10.57\times5^2$$

- 團體中各分數都乘一常數C，則新的變異數會是原變異數的C^2倍。

	樣本	母群
平均數	$\bar{X}$	μ
變異數	$S^2 = \frac{\sum(X-\bar{X})^2}{n-1}$	$\sigma^2 = \frac{\sum(X-\mu)^2}{N}$
標準差	$S = \sqrt{\frac{\sum(X-\bar{X})^2}{n-1}}$	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(X-\mu)^2}{N}}$

變異係數(相對差異係數)

- 變異係數（coefficient of variation）是一個與標準差有關，且可以用來比較團體間相對變異量大小的指標，以CV表示 。

$$CV = \frac{\sigma_X}{\mu} \times 100$$

四分差

- 四分差是指團體中最中間50%的人之分數全距的一半以Q表示。四分差公式如下：

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$Q_1 = l_1 + \left(\frac{\frac{1}{4}N - F_1}{f_{Q1}}\right)\mathrm{h}$$

$$Q_3 = l_3 + \left(\frac{\frac{3}{4}N - F_3}{f_{Q3}}\right)\mathrm{h}$$

l_1 ＝第一四分位數所在組真正下限
l_3 ＝第三四分位數所在組真正下限
$F_1 = l_1$以下的累積次數
$F_3 = l_3$以下的累積次數
f_{Q1}=第一四分位數所在組的次數
f_{Q3}=第三四分位數所在組的次數
h ＝組距
N ＝總人數

四分差Q和其他三個四分位數Q_1、Q_2、Q_3之間的關係

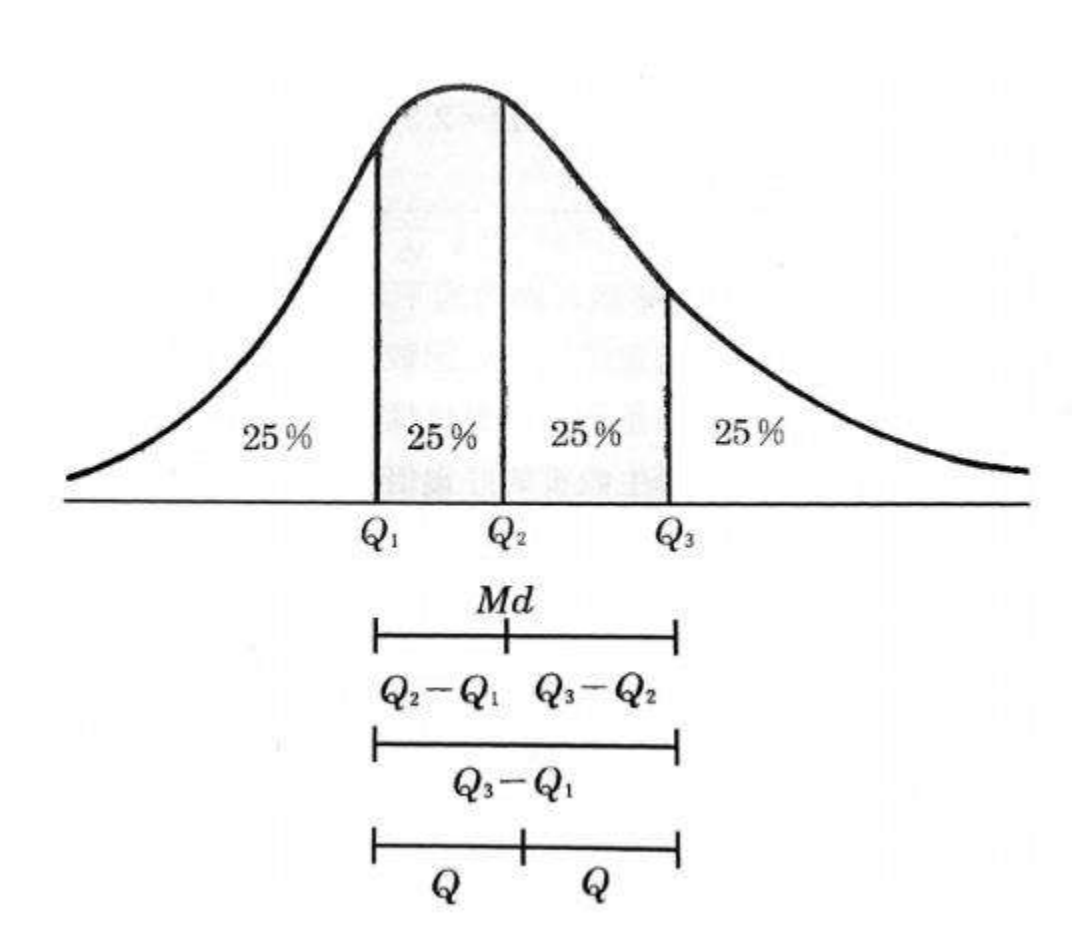


圖 四分差Q以及四分位數Q_1、Q_2和Q_3之間的關係
（改自Guilford, 1965, p.70）

表 五十五名學生成就測驗分數之四分差

組 別	f	cf
75～79	1	55
70～74	2	54
65～69	4	52
60～64	5	48
55～59	8	43
50～54	10	35
45～49	9	25
40～44	7	16
35～39	4	9
30～34	2	5
25～29	2	3
20～24	1	1
	$N=55$	

$$Md=49.5+\left(\frac{\frac{55}{2}-25}{10}\right)5=50.75\text{（分）}$$

$$Q_1=39.5+\left(\frac{\frac{55}{4}-9}{7}\right)5=42.89\text{（分）}$$

$$Q_3=54.5+\left(\frac{\frac{3\times55}{4}-35}{8}\right)5=58.41\text{（分）}$$

$$Q=\frac{58.41-42.89}{2}=7.76\text{（分）}$$

適用時機

1. 依變數性質而定：
   R, AD, SD , Q皆可用於等距變數
   Q--次序變數(使用Q前須先將數列排序)
2. 計算速度
3. 穩定性：SD➔ AD ➔ Q ➔ R
4. 極端值：Q

例題示範

- 請使用下列次數分配中的觀察值，回答下列各題。

2, 3, 5, 7, 7, 9, 10, 10, 10, 12

1. 請問眾數是多少？
2. 請問總人數（N）是多少？中位數是多少？
3. ΣX的值是多少？平均數是多少？
4. 請描述該分配的形狀？(正偏或負偏)
5. 請問四分差是多少？
6. 請問SS、變異數、標準差各是多少？

例題示範

- 已知某班學生50人，其身高的平均數為170公分，變異數為64平方公分；而其體重的平均數為58公斤，變異數為36平方公斤。試問該班的身高和體重，何種分配的變異程度較大？

- N＝30的一班學生，統計小考成績平均為75，如果有29名學生的離均差總和是6，那麼第30個學生的小考成績是多少？

例題示範

- 某班40名學生接受兩次測驗，其結果：A測驗的平均數為50分，標準差為4.5分；B測驗的平均數為40分，標準差為6.4分，將兩次測驗分數相加得到學期總成績。請回答下列問題：

1. 該班學期總成績的平均數為多少分？
2. 求兩次測驗順之差，此差值的平均數為多少分？
3. 假設該班老師宣稱A測驗評分有誤，每位學生的得分應各加5分才正確。請問該班在A測驗的真正平均分數和變異數各應該是多少？
4. 假設該班老師宣稱B測驗評分有誤，每位學生的得分應各乘以2才正確。請問該班在B測驗的真正平均分數和變異數各應該是多少？

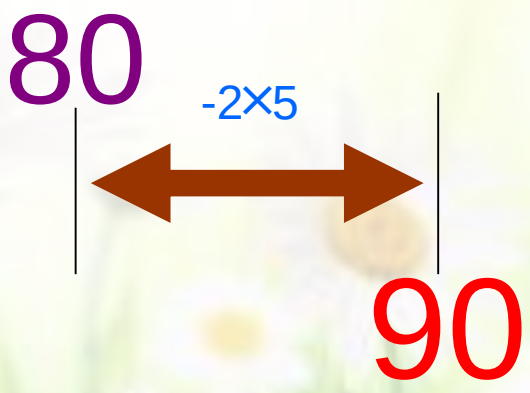
第五章

相對地位量數

相對數量

- 數據的解讀：
  - 絕對意義：由數值大小反應
  - 相對意義：需從相對比較，甚至於進行變項數據的標準化，才能對於數據的意義進行正確解讀。
- 相對量數或相對地位量數
  - 個別觀察值在團體中所在相對位置
  - 將某特定觀察值在樣本中所處的位置，以其他分數進行參照，計算出觀察值在該變項上分數的團體地位
  - 常用的相對量數包括百分等級、百分位數、標準分數

- 某日，統計老師發期中考卷，甲生拿到考卷後，看得成績是80分，喜出望外，心想這一次總算要揚眉吐氣了，但是，只見老師在黑板上寫下本次期中考全班平均成績是90分，標準差5分。這下子，甲生還能高興的起來嗎？



百分位數與百分等級

百分等級（percentile rank；PR）：

- 可以說明個別分數在團體中的相對地位。其意義是指在分數分配中，某一個分數之下的次數所佔的百分比。也可以說在一百個人中，該分數可以排在第幾個等級。
- 如小明的國語成績85分，在四年級的百分等級是70，就表示有70%的學生在85分之下，換言之，小明的成績贏過全四年級70%的學生。
- PR＝50代表某一個分數在團體中可以勝過50%的人，他的分數也恰好是中位數。

百分等級的計算-已歸類資料

- 由原始分數求百分等級

$$PR = \frac{100}{N}\left[\frac{(X - l)f_p}{h} + F\right]$$

X= 任意原始分數
l= 該原始分數所在組真正下限
f_p= 該原始分數所在組的次數
F= l 以下的累積次數
h= 組距

百分等級的計算-未歸類資料

$$PR = \left(\frac{K^{th}}{N}\right) \times 100$$

（劉弘煌，社會統計學p. 53）

K^{th}：小至大的排列名次

N：人數

X=43, PR=?（例題5-2，林清山）

組別	f	cf	cp
75～79	1	55	100
70～74	2	54	98.1
40～44	7	16	29.0
35～39	4	9	16.3
30～34	2	5	9.0
25～29	2	3	5.4
20～24	1	1	1.8
	$N=55$		

$$PR = \frac{100}{N}\left[\frac{(X-l)f_p}{h} + F\right]$$

$$= \frac{100}{55}\left[\frac{(43-39.5)7}{5} + 9\right] = 25.27 \fallingdotseq 25$$

例題示範

- 小竹在這次考試的成績是51分，請問他的百分等級(PR)是多少？

$$PR = \frac{100}{40} \times \left[17 + \frac{9 \times (51 - 49.5)}{5}\right]$$
$$= 2.5 \times \left[17 + \frac{9 \times 1.5}{5}\right]$$
$$= 2.5 \times (17 + 2.7)$$
$$= 71.75$$

PR=71（每100人中贏72人）

組別	次數	累積次數	累積百分比(%)
65-69	3	40	100
60-64	4	37	92.5
55-59	7	33	82.5
50-54	9	26	65
45-49	8	17	42.5
40-44	6	9	22.5
35-39	3	3	7.5

表一、某校40名學生的成績

原始分數與百分等級換算表(百分等級常模)

原始分數	百分等級	原始分數	百分等級	原始分數	百分等級
78	99	58	74	38	14
77	99	57	71	37	13
76	99	56	68	36	11
75	98	55	65	35	10
74	98	54	62	34	9
73	97	53	58	33	8
72	96	52	55	32	7
71	96	51	51	31	7
70	95	50	47	30	6
69	94	49	44	29	5
68	92	48	41	28	4
67	91	47	37	27	4
66	89	46	34	26	3
65	88	45	31	25	2
64	86	44	28	24	2
63	85	43	25	23	1
62	83	42	23	22	1
61	81	41	20	21	1
60	79	40	18		
59	77	39	16		

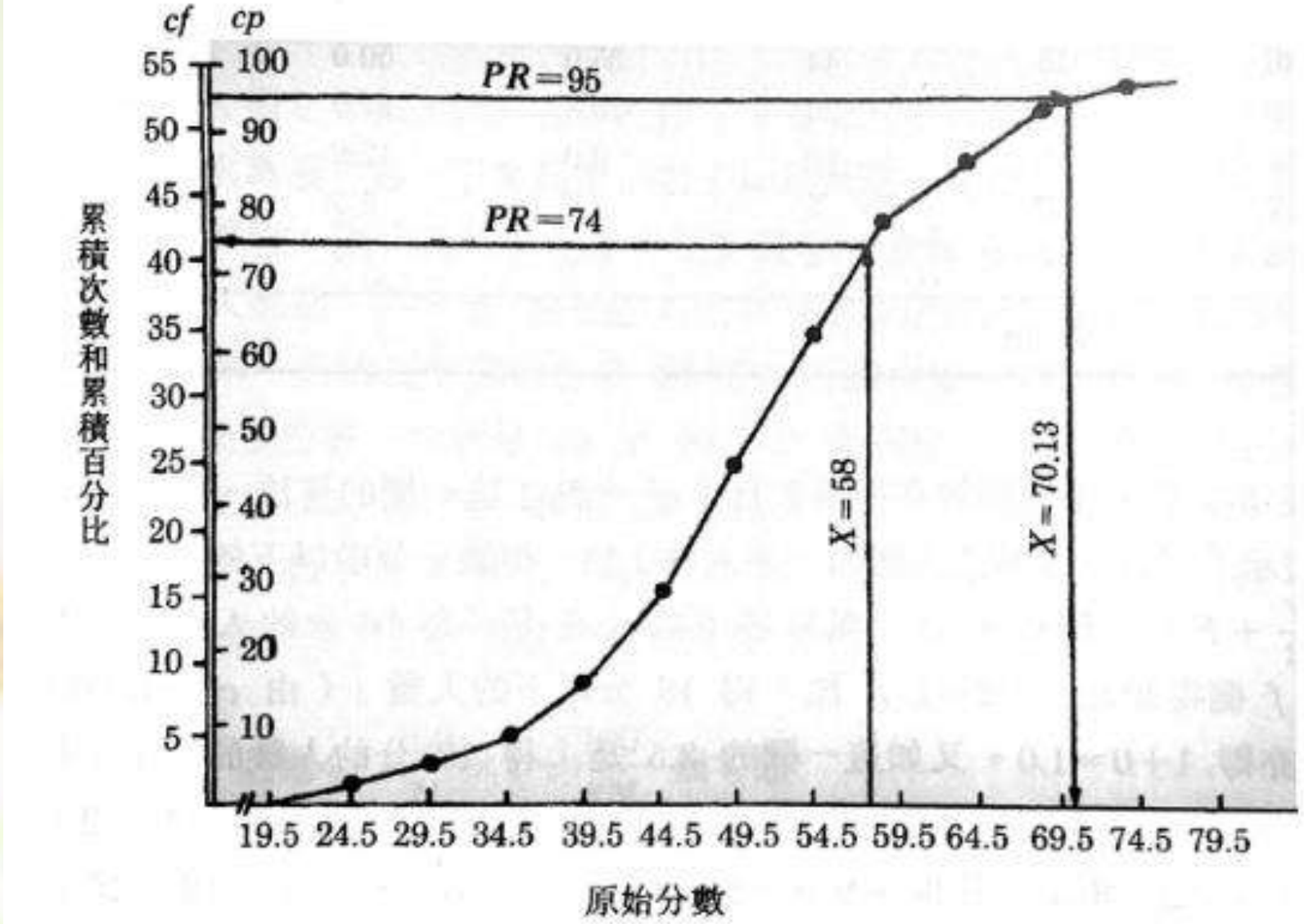


圖 累積百分比曲線（肩形曲線）

百分等級的計算-未歸類的資料

- 以PR表示，用來表示一個人所得到的分數在團體中所佔的地位。

$$PR = 100 - \frac{(100R - 50)}{N}$$

R是在團體排行中的名次，N為總人數。

- Excel百分等級: (R-1)/(N-1)

例題示範

- 在測驗上最高的百分等級應為？

  (A)98　　(B)99

  (C)100　　(D)101

- 某校某班學生50人，有3人的測驗成績高於小張，其他46人得分比小張為低，則小張的PR為

  (A)47　　(B)46

  (C)92　　(D)93

百分位數與百分等級

- 百分位數（ percentile point ；P_p）：

  指某個人在這團體的一百個等級中想勝過幾個等級，那麼他必須得到幾分。因此百分位數P_p是指一百個人之中第p 個人所得的分數，在此人之下的次數佔p %，亦即有p %的人不如他。換言之，即某PR所對應到的分數。

- 例如中位數為60分時，表示有50%的人比60分還低，此時我們可以說第50百分位數為60分，以P_{50}=60表示之。

百分位數的計算—已歸類資料

$$P_P = l + \left(\frac{\frac{PR}{100} N - F}{fp} \right) h$$

PR＝百分等級

l＝第p百分位數所在組的真正下限

f_p＝第p百分位數所在組的次數

F＝第p百分位數所在組以下的累積次數

h＝組距

PR=74, P_{74}= ?

組別	f	cf	cp
75～79	1	55	100
70～74	2	54	98.1
65～69	4	52	94.5
60～64	5	48	87.2
55～59	8	43	78.1
50～54	10	35	63.6
45～49	9	25	45.4
40～44	7	16	29.0
35～39	4	9	16.3
30～34	2	5	9.0
25～29	2	3	5.4
20～24	1	1	1.8
	$N=55$		

$$P_{74}=l+\left(\frac{\frac{PR}{100}\times N-F}{f}\right)h$$

$$=54.5+\left(\frac{\frac{74}{100}\times 55-35}{8}\right)$$

$$=58.06$$

例題示範

- 小勛在這次考試中，想達到PR=68，請問他應該考幾分呢？

$$P_{68} = 54.5 + \left[\frac{(\frac{68}{100} \times 40 - 26)}{7} \right] \times 5$$

$$= 54.5 + \left[\frac{(27.2 - 26)}{7} \right] \times 5$$

$$= 54.5 + 0.86$$

$$= 55.36$$

組別	次數	累積次數	累積百分比(%)
65-69	3	40	100
60-64	4	37	92.5
55-59	7	33	82.5
50-54	9	26	65
45-49	8	17	42.5
40-44	6	9	22.5
35-39	3	3	7.5

表　某校40名學生的成績

P68=55.36

表示小勛最低要考55.36分

百分位數的計算

(1)N為奇數

$$P_p = \frac{X}{100} \times (N+1)$$

(2)N為偶數

$$P_p = \frac{X}{100} \times (N) \text{ 與}$$

$$P_p = \frac{X}{100} \times (N) + 1 \text{ 兩數之平均值}$$

X：百分位數值
N：人數

百分位數與百分等級

- 兩者的數學關係

  百分等級是將原始分數轉化為等級（百分比）

  百分位數則是由某一等級來推算原始分數

標準分數

- 標準分數（standard scores）
  - 利用線性轉換的原理，將一組數據轉換成不具有實質的單位與集中性的標準化分數。
  - 不同的標準分數，其共通點是利用一個線性方程式$y=bx+a$進行集中點的平移與重新單位化，使得不同量尺與不同變項的測量數據具有相同的單位與相同的集中點，因此得以相互比較。

標準分數

- 常用的標準分數
  - z分數
  - T分數(T=10Z+50)
  - SAT考試（Scholastic Assessment Test）（SAT=100Z+500）
  - 比西測驗IQ分數（平均數為100，標準差為16的標準分數）（IQ=16*Z*+100), 魏氏智力測驗為15*Z*+100

標準分數（z）

標準分數係以標準差為單位，說明某分數與平均數間的距離，即某分數與平均數的距離是幾個標準差。

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Z分數的特性

- 分數可以作分配內與跨分配的比較。
  - Z分數小於0，平均數以下
  - Z分數大於0，平均數以上
  - 數值越大，距離平均數越遠，若觀察值恰等於平均數，則Z分數為0。

Z分數的直線轉換

將 z 分數予以直線轉換，使負數和小數的 z 值都變成正值，以符合日常解釋現象的習慣。這種由 z 分數加以直線轉換而成的分數，叫做 Z 分數，直線轉換公式為：

$$Z = az + b = a\left(\frac{X - \mu}{\sigma_X}\right) + b$$

a＝化為Z分數後的標準差

b＝化為Z分數後的平均數

當原始分數轉換為Z分數時，Z分數之平均數($\overline{Z}$)為0，而變異數(σ_z^2)和標準差(S_z)為 1

$$\bar{z} = \frac{\sum z}{N} = \frac{1}{N}\sum z = \frac{1}{N}\frac{\sum(X-\mu)}{\sigma_z^2} = \frac{1}{N}\frac{0}{\sigma_x} = 0$$

$$\sigma_z^2 = \frac{\sum(z-\bar{z})^2}{N} = \frac{\sum(z-0)^2}{N} = \frac{\sum z^2}{N}$$

$$= \frac{1}{N}\frac{\sum(X-\mu)^2}{\sigma^2} = \frac{\sum(X-\mu)^2}{N}\frac{1}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

Z分數的直線轉換

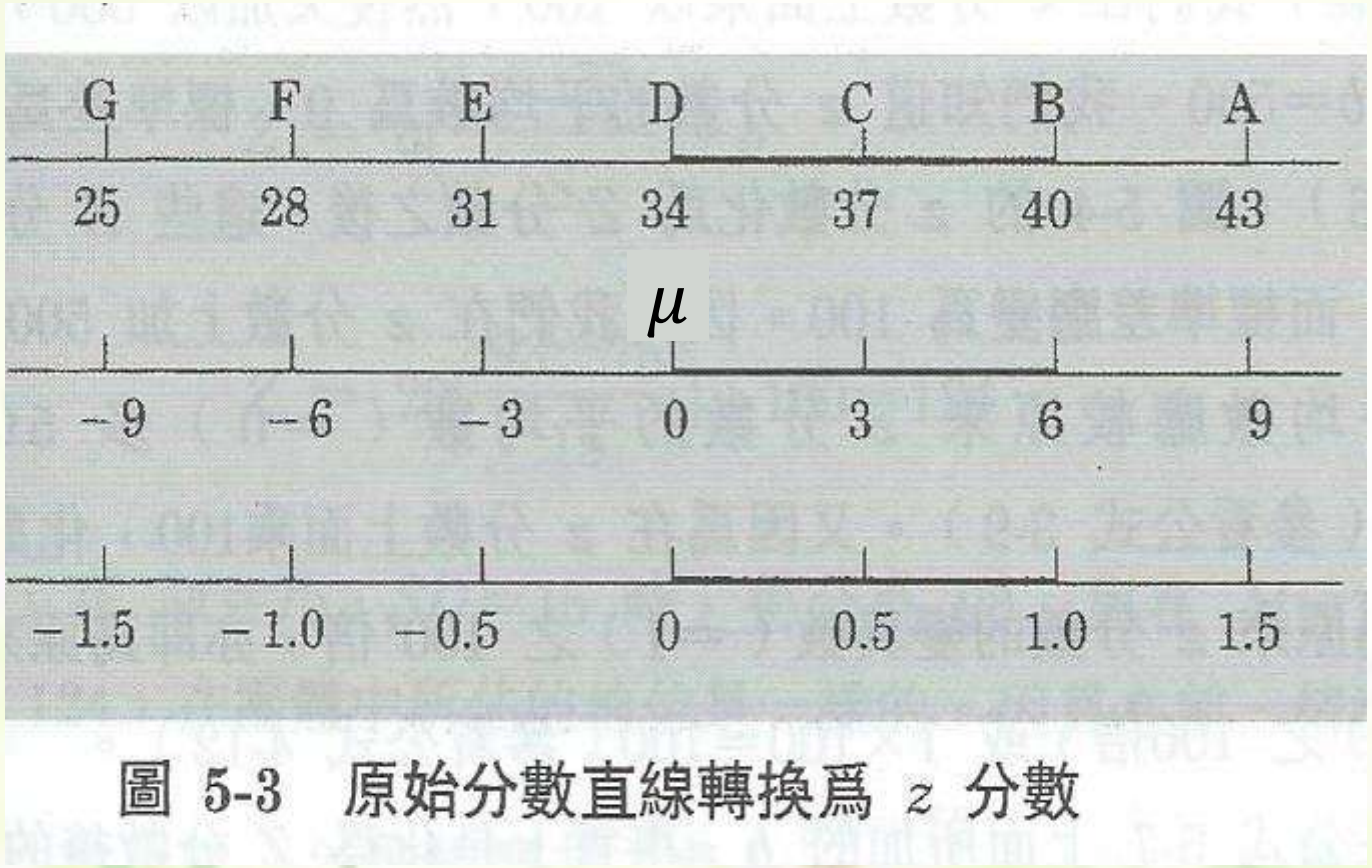


圖 5-3　原始分數直線轉換爲 z 分數

Z分數的直線轉換

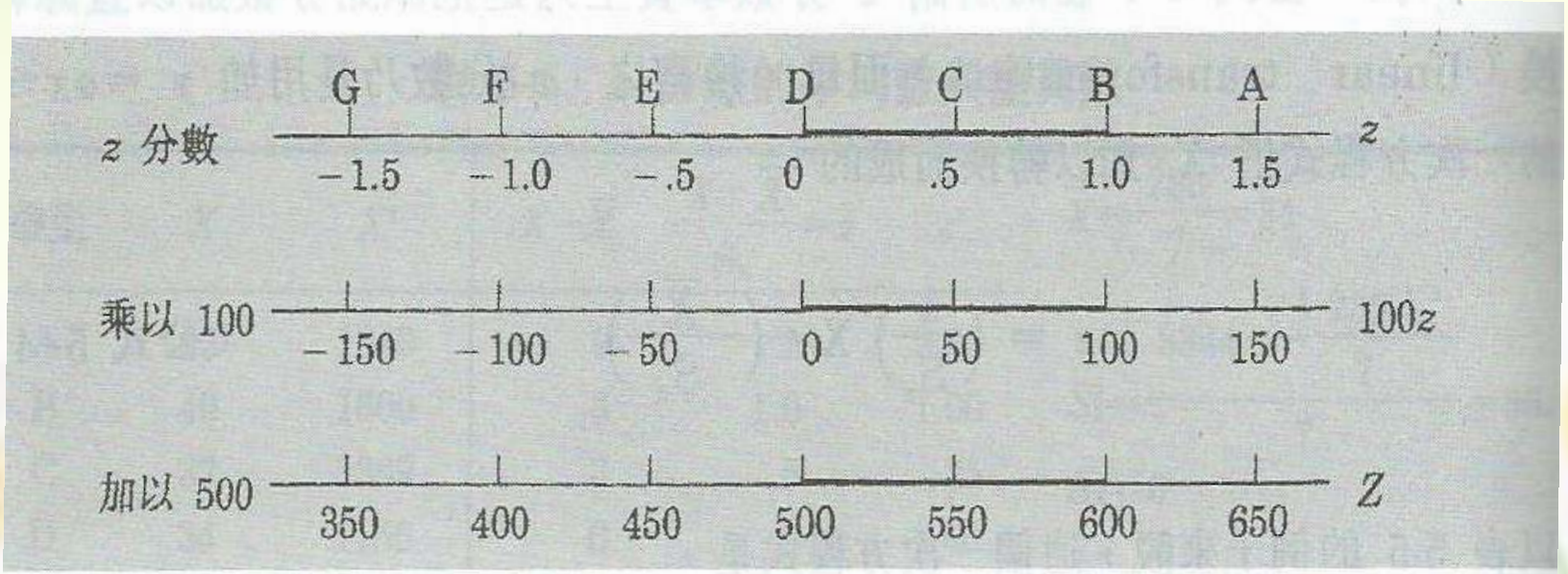


圖 5-4　z 分數直線轉換爲 Z 分數

例題示範

- 某班平均分數為90分，標準差為3分，甲生得96分，乙生得87分，求甲乙生的z分數

$$Z甲 = \frac{96-90}{3} = \frac{6}{3} = 2.0$$

$$Z乙 = \frac{87-90}{3} = \frac{-3}{3} = -1.0$$

例題示範

- 六年級某班數學科第一段考全班平均數為64.50，標準差為8.65。甲生得分85分，乙生得分58分。問甲乙生的z分數各為多少？
  如何解釋?

Ans：

甲生：$$z = \frac{85 - 64.50}{8.65} = +2.37$$

乙生：$$z = \frac{58 - 64.50}{8.65} = -.75$$

表 採用原始分數與採用標準分數導致不同結果

原始分數		總考生的		z 分數	
甲生	乙生	μ	SD	甲生	乙生
71	80	62	9	1.00	2.00
34	24	38	7	− .57	−2.00
39	26	25	5	2.80	.20
72	64	60	8	1.50	.50
61	91	71	10	−1.00	2.00
277	**285**			**3.73**	**2.70**

計算七位學生成績之Z分數

表 5-5　z 分數的平均數與變異數

學生	X	X^2	$X-\mu$	$\frac{X-\mu}{S_x}=z$	z^2
A	43	1849	9	1.5	2.25
B	40	1600	6	1.0	1.00
C	37	1369	3	.5	.25
D	34	1156	0	.0	.00
E	31	961	−3	−.5	.25
F	28	784	−6	−1.0	1.00
G	25	625	−9	−1.5	2.25
	238	**8344**	**0**	**0**	**7.00**

$$\mu=\frac{238}{7}=34$$

$$\sigma_x^2=\frac{8344-\frac{(238)^2}{7}}{7}=36$$

$$\sigma_x=6$$

$$\bar{z}=\frac{0}{7}=0$$

$$\sigma_z^2=\frac{7.00-\frac{(0)^2}{7}}{7}=1$$

$$\sigma_z=1$$

標準分數（t）

- 是經過標準化的一種標準分數，但其平均數轉換為50，標準差轉換為10。

$$T = 10z + 50$$

- T分數可改善z分數的缺點

Z值多介於±3之間，計算時多半帶有一至二位的小數點，加上低於平均數的Z分數帶有負號，實際使用上較為不便。

變形T分數 （謝錦城老師編）

正向給分時

$$T = S_L + \frac{S_R}{(Z_H - Z_L)}(Z_i - Z_L)$$

負向給分時

$$T = S_H - \frac{S_R}{(Z_H - Z_L)}(Z_i - Z_L)$$

S_H：欲分配之最高分

S_L：欲分配之最低分

S_R：欲分配最高與最低分之差

Z_H：Z分數之最高值

Z_L：Z分數之最低值

Z_i：某一Z分數

百分等級與標準分數之比較

1. 使用百分等級的優點：容易讓人理解，適合所有測驗分數的轉換。

   使用百分等級的缺點：因為百分等級是非等距變項，所以不能進一步做代數運算的處理。

2. 使用標準分數的優點：適合做數學處理，可以進行加減乘除等四則運算，所以在推論統計學上應用較廣。

   使用標準分數的缺點：不容易被沒有統計學概念的人了解。

例題示範

- 某班學生的智育成績如下，試求（1）得91分者的z分數，說明此z分數的意義；（2）得67分者的百分等級。

8、62、66、67、72、73、79、81、82、85、87、91、92、94、96、97

例題示範

- 某班40名學生接受兩次測驗，其結果：英文測驗的平均數為69分，標準差為5.5分；數學測驗的平均數為51分，標準差為6.2分請回答下列問題：

1. 大仁在英文測驗和數學測驗上都得到58分，請問他哪一科考得比較好，為什麼？
2. 若將大仁的英文和數學之z分數再轉換為W分數（平均數為110，標準差為15），則大仁的英文和數學之W分數各是多少？

例題示範

- 某班平均分數為90分，標準差為3分，甲生得96分，乙生得87分，求甲乙生的T分數？

$$z_{甲} = 2$$
$$T_{甲} = 50 + (10 \times 2) = 70$$

$$z_{乙} = -1$$
$$T_{乙} = 50 + (10 \times -1) = 40$$

例題示範

- Z分數的範圍為何?

(A)-2~+2　　(B)-3~+3
(C)-4~+4　　(D)-∞~+∞

- 阿晨在平均數為81，標準差為5的數學成就測驗中，獲得71分，試問阿晨成績如何？
  (A)其Z分數為-1
  (B)大多數人的分數比阿晨高
  (C)其PR值為40
  (D)其T分數為50

例題示範

- 某生的測驗得分為60，若依據成績高低編班，他要進入哪一班級，他的相對程度會較高？
  (A)平均數50，標準差10
  (B)平均數55，標準差5
  (C)平均數40，標準差15
  (D)平均數56，標準差2

例題示範

- 二次轉換標準分數T=10Z+50,請問轉換後的平均數與標準差各為多少?
  (A)平均數10,標準差50
  (B)平均數50,標準差10
  (C)平均數與標準差不變
  (D)平均數0,標準差1
- 某標準化數學科成就測驗其平均數為66，標準差為8，則考生至少要考幾分才有可能被數學資優班錄取？
  (A)76 分　　(B)78 分
  (C)80 分　　(D)82 分。

例題示範-題組一

152	196	227	250	276
165	200	230	253	288
172	203	235	254	294
174	203	237	257	295
180	208	238	263	300
185	217	243	265	308
187	218	245	266	315
189	222	245	269	325
192	225	247	270	
194	226	248	274	

- 此為某大學學生立定跳遠成績，求Q1、Q2、Q3及四分差

Q1=201.5

Q2=237.5

Q3=265.5

四分差：

Q=(Q3-Q1)/2

=(265.5-201.5)/2=32

例題示範-題組一

- 立定跳遠成績為235公分的百分等級為何？

組別	上下限	組中點	劃記	次數	累積次數	累積百分比
1	151－170	160.5	//	2	2	4.17
2	171－190	180.5	/// /	6	8	16.67
3	191－210	200.5	/// //	7	15	31.25
4	211－230	220.5	/// //	7	22	45.83
5	231－250	240.5	//// ////	9	31	64.58
6	251－270	260.5	//// ///	8	39	81.25
7	271－290	280.5	///	3	42	87.50
8	291－310	300.5	////	4	46	95.83
9	311－330	320.5	//	2	48	100.00

例題示範-題組一

- 已歸類算法

1. $$PR = \frac{100}{N}\left[\frac{(X - l) f_P}{h} + F\right]$$

$$PR = \frac{100}{48}\left[\frac{(235 - 230.5)x9}{20} + 22\right] = 50.05\%$$

2. $$PR = \left(\frac{K^{th}}{N}\right) \times 100$$

23/48=47.92

例題示範-題組一

- 未歸類算法

$$PR = 100 - \frac{(100R - 50)}{N}$$

(100*23-50)/48=46.88

例題示範-題組一

- 試求P_{10}、P_{20}、P_{50}、P_{80}、P_{90}

$$P_{10}=170.5+\left(\frac{\frac{10}{100}*48-2}{6}\right)*20=179.83$$

$$P_{20}=190.5+\left(\frac{\frac{20}{100}*48-8}{7}\right)*20=195.07$$

例題示範-題組一

$$P_{50} = 230.5 + \left(\frac{\frac{50}{100} * 48 - 22}{9} \right) * 20$$

$$P_{80} = 250.5 + \left(\frac{\frac{80}{100} * 48 - 31}{8} \right) * 20 \text{ =269}$$

$$P_{90} = 290.5 + \left(\frac{\frac{90}{100} * 48 - 42}{4} \right) * 20 \text{ =296.5}$$

例題示範-題組一

- 立定跳遠成績為235公分的T分數為何？

$$T = 10 \times (-0.02) + 50$$
$$= 49.8$$

例題示範-題組一

- 欲以立定跳遠之成績235公分分配在60-100分之間所能得的分數為多少？

$$T = 60 + \frac{40}{\left(2.13 - (-2.01)\right)}\left(-0.02 - (-2.01)\right)$$
$$= 79.23$$

第六章
積差相關與簡單迴歸

相關分析與簡單直線迴歸分析

接下來兩章所要討論的是同時考慮兩個變項的統計方法，這種同時使用兩個變項的資料，稱作雙變項資料（bivariate data）。雙變項資料通常用來探討「相關」（correlation）和「預測」（prediction）的問題。

- 「**相關**」（correlation）：

  探討兩個變相間是否產生共同變異的線性關聯程度

- 「**預測**」（prediction）：

  在兩變項之間的線性關係基礎上，根據某個已知變項來預測另一個變項的未來變化情形。

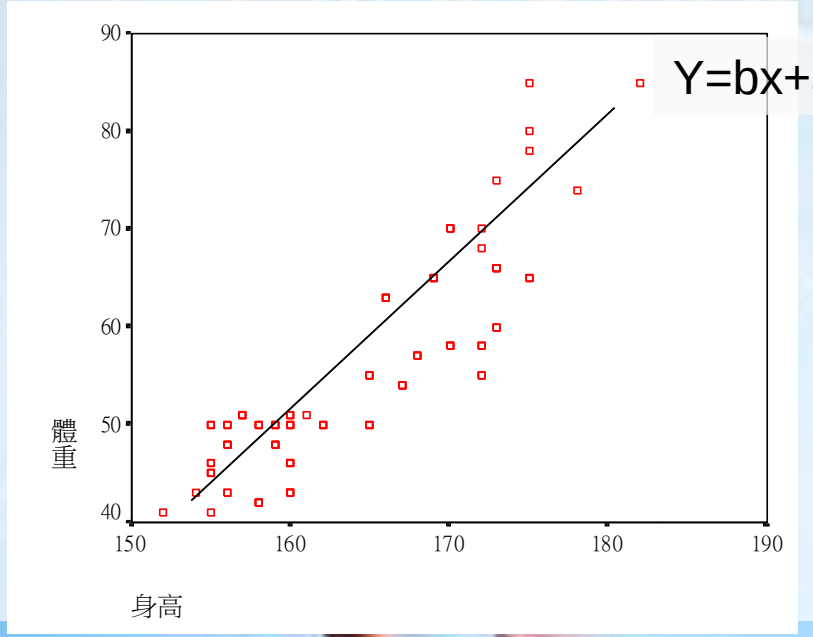
相關的意義和種類

兩個連續變項間的線性關聯程度（degree of association），常以「相關係數」（correlation coefficient）來表示，母體以希臘字母ρ、樣本以英文字母*r*作為其符號。

可用來描述兩個變項的變化趨勢，但無法決定因果關係。

線性關係

- 線性關係
  - 兩個變項關係呈直線共同變化
  - 可以一條最具代表性的直線來表達的關聯情形 。
  - 直線方程式 $Y=bx+a$
- 線性關係可以**散佈圖**的方式來表現



相關係數的大小或強弱（magnitude）

指係數值本身的絕對值大小。

其值越大，表示這兩個變項間的關聯性越強，其值越小，表示這兩個變項間的關聯性越弱。

相關係數的方向符號（sign of direction）

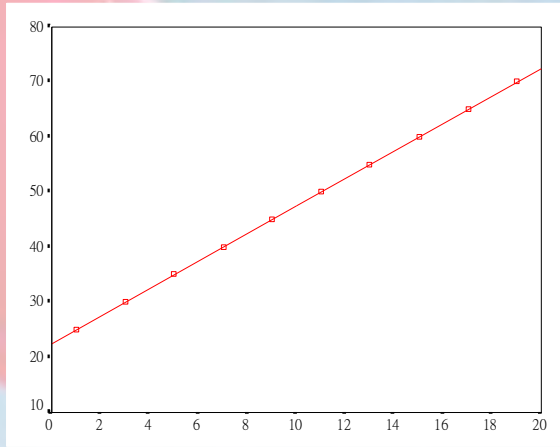
指係數值本身是正或負號。

正號表示兩個變項間具有順（正）向的關聯性，其值域介於0與1之間；負號則表示兩個變項間具有逆（負）向的關聯性，其值域介於0與1之間。

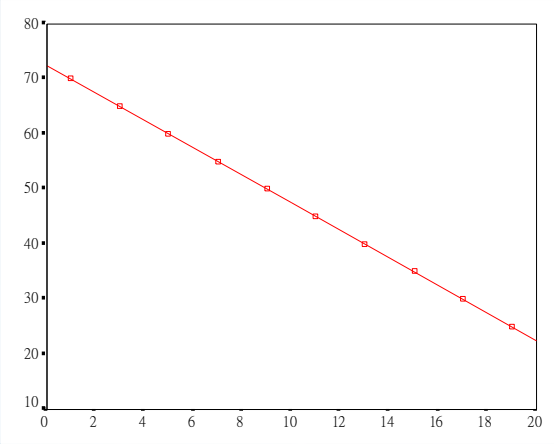
- 不同的相關情形
  - 完全正相關
  - 完全負相關
  - 正相關
  - 負相關
  - 零相關

關聯情形		關聯方向	
		正向關係	負向關係
關聯強度	完全關聯	完全正相關	完全負相關
	有關聯	正相關	負相關
	無關聯	零相關	

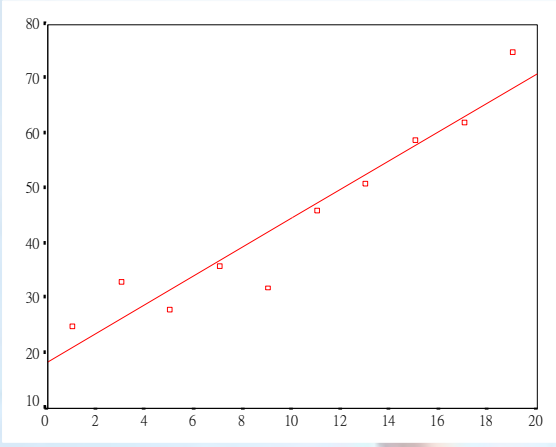
五種不同的相關情形圖示



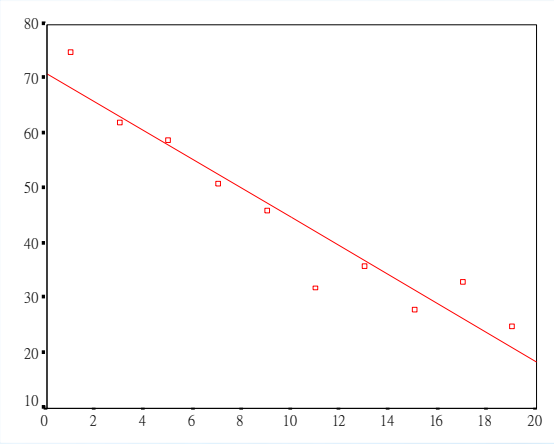
(a)完全正相關



(b)完全負相關

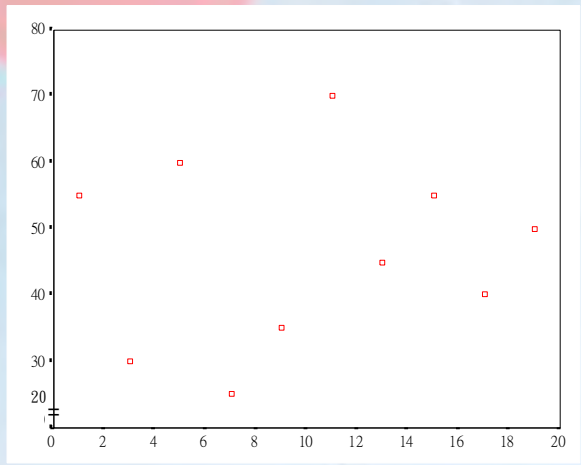


(c)正相關

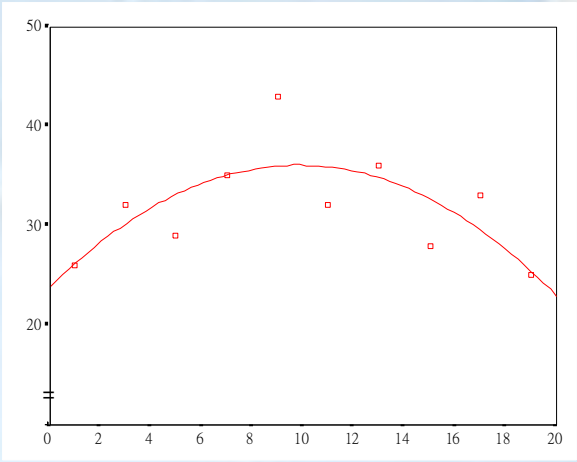


(d)負相關

五種不同的相關情形圖示



(g)零相關



(h)零相關

學生	測驗一 (X)	測驗二 (Y)
A	16	13
B	14	11
C	12	9
D	11	8
E	9	6
F	8	5
G	5	2

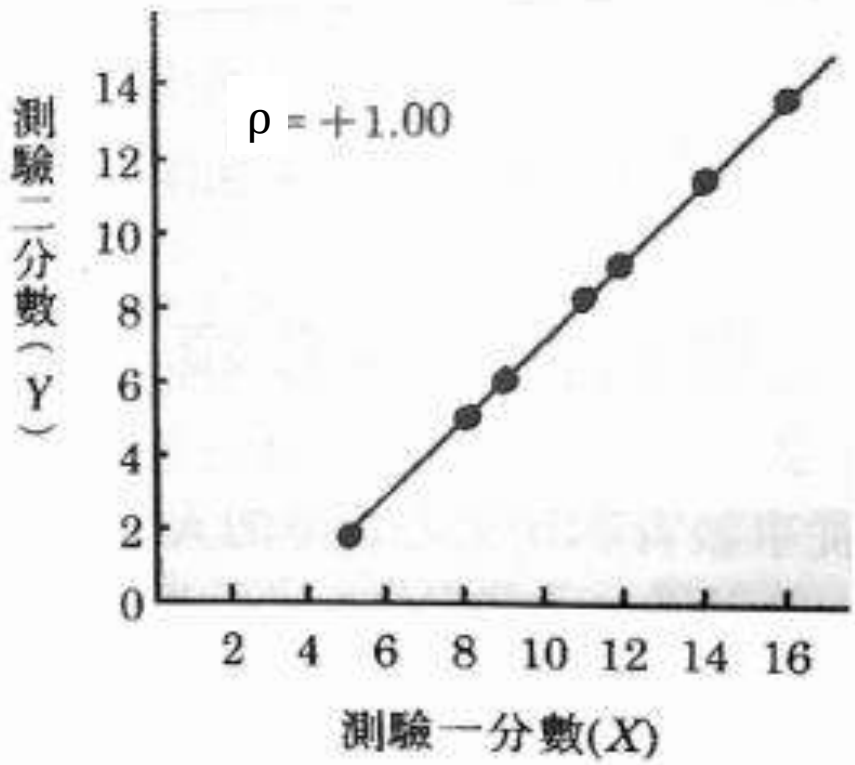


圖 7-1　完全正相關

學生	高中成績	大學聯考成績
A	11	12
B	10	9
C	6	9
D	5	7
E	3	5
F	7	5
G	3	6
H	8	6
I	9	10
J	2	3

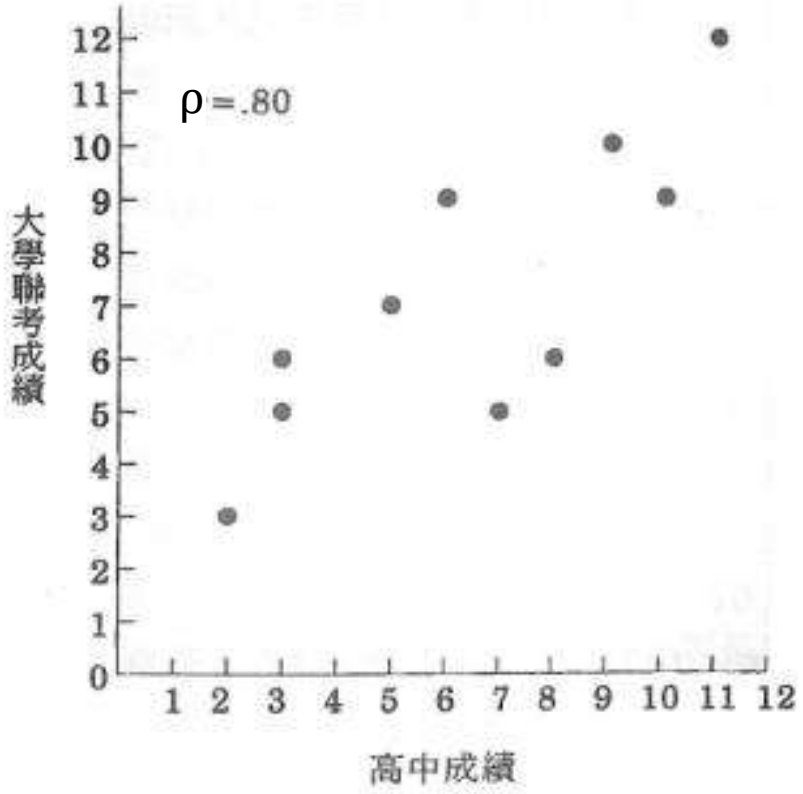


圖 7-2　正相關

學生	腰圍	智力
A	6	2
B	4	5
C	7	3
D	5	6
E	2	2
F	1	4
G	3	3
H	4	7

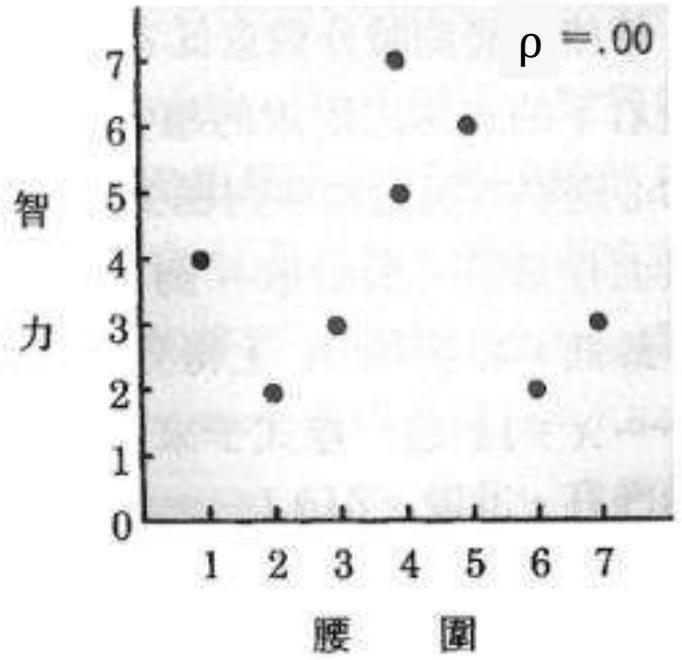


圖 7-3　零相關

學生	情緒困擾	學業成就
A	2	11
B	4	6
C	5	10
D	5	4
E	8	8
F	9	6
G	8	3
H	10	4
I	12	2

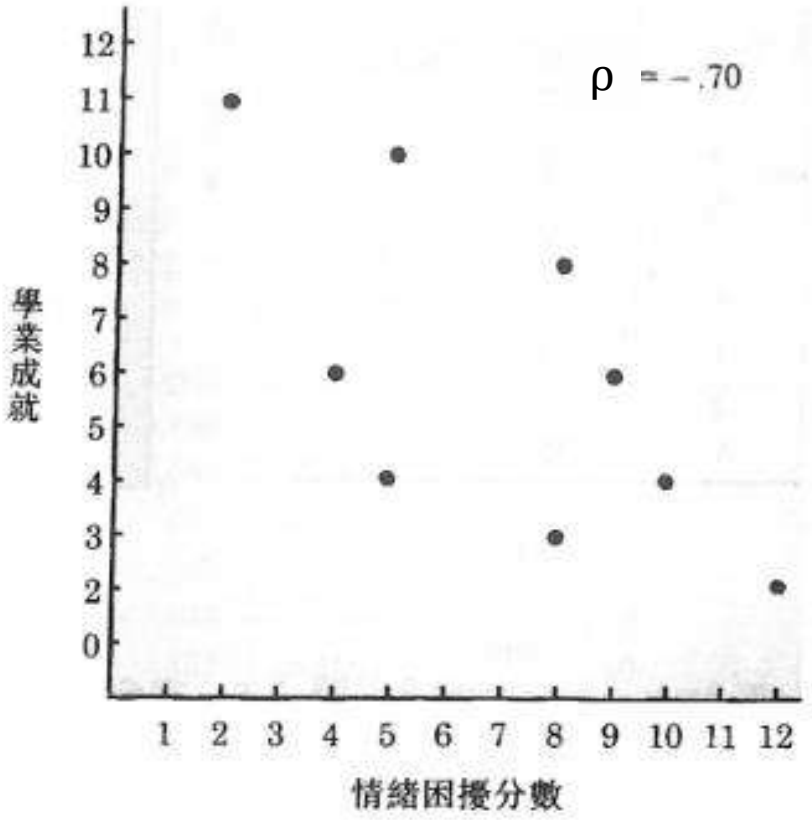


圖 7-4　負相關

學生	測驗A	測驗B
A	2	12
B	3	11
C	5	9
D	6	8
E	7	7
F	10	4
G	11	3

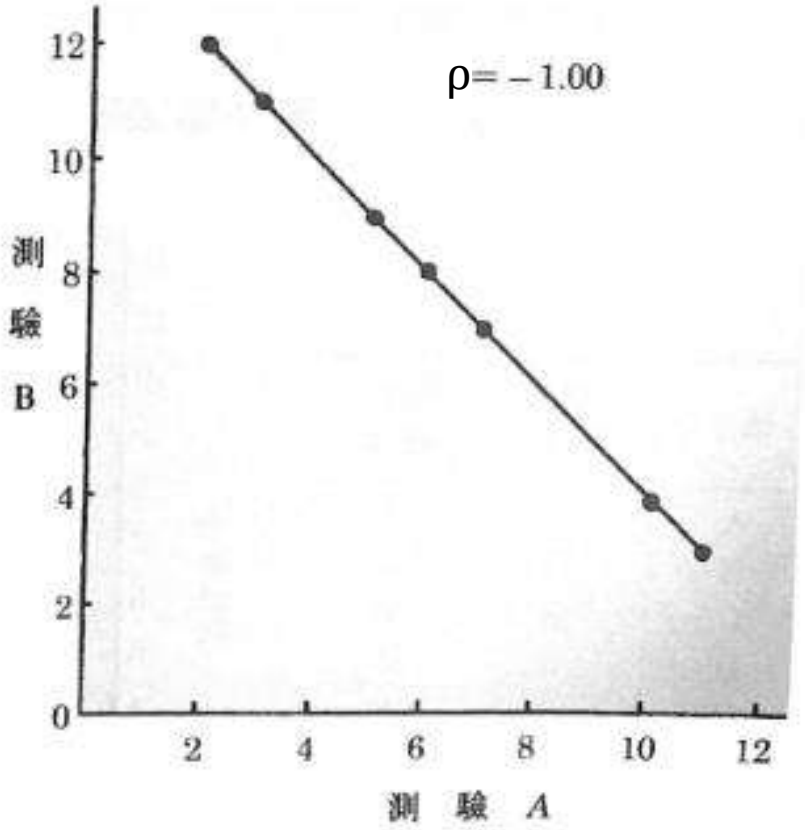


圖 7-5　完全負相關

相關係數的強度大小與意義（參考用）

相關係數範圍(絕對值)	變項關聯程度
1.00	完全相關
.70 至.99	高度相關
.40 至.69	中度相關
.10 至.39	低度相關
.10 以下	微弱或無相關

積差相關的計算

$$\rho_{XY} = \frac{\sum z_x z_y}{N} = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$= \frac{\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sqrt{\Sigma(X - \bar{X})^2 (Y - \bar{Y})^2}} = \frac{SP_{xy}}{\sqrt{SS_x SS_y}}$$

- 不用背，知道概念，能應用即可
- 類比思考跟變異數的異同

積差相關的計算

積差相關的定義公式即是指兩個變項z分數之乘積和的平均數：

$$\rho_{XY} = \frac{\sum z_X z_Y}{N}$$

表 7-1　利用 z 分數求相關係數

學生	高中成績			大學聯考成績			$z_X z_Y$
	X	X^2	z_X	Y	Y^2	z_Y	
A	11	121	1.547	12	144	1.846	2.855
B	10	100	1.210	9	81	0.692	0.837
C	6	36	− .134	9	81	0.692	− .092
D	5	25	− .470	7	49	− .077	0.036
E	3	9	−1.143	5	25	− .846	0.966
F	7	49	0.201	5	25	− .846	− .170
G	3	9	−1.143	6	36	− .462	0.528
H	8	64	0.538	6	36	− .462	− .243
I	9	81	0.874	10	100	1.077	0.941
J	2	4	−1.480	3	9	−1.615	2.390
	64	498		72	586		8.048

$$\mu_x = \frac{64}{10} = 6.40$$

$$\sigma_x^2 = \frac{498 - \frac{(64)^2}{10}}{10} = 8.84$$

$$\sigma_x = 2.9732$$

$$\mu_y = \frac{72}{10} = 7.20$$

$$\sigma_y^2 = \frac{586 - \frac{(72)^2}{10}}{10} = 6.76$$

$$\sigma_y = 2.60$$

$$\rho_{xy} = \frac{8.048}{10} = .80$$

積差相關的計算公式

- 積差相關的計算公式，只要把上數定義公式中的z_x和z_y值，分別代入其基本定義公式即得，亦即：

$$z_X = \frac{X - \overline{X}}{\sigma_X} = \frac{x}{\sigma_X} \qquad z_Y = \frac{Y - \overline{Y}}{\sigma_Y} = \frac{y}{\sigma_Y}$$

再代入定義公式，得：

$$\rho_{XY} = \frac{\sum z_X z_y}{N} = \frac{\sum\left(\frac{x}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y}{\sigma_Y}\right)}{N} = \frac{\sum xy}{N\sigma_X\sigma_Y}$$

$$\rho_{XY} = \frac{\sum z_X z_y}{N} = \frac{\sum\left(\frac{x}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y}{\sigma_Y}\right)}{N} = \frac{\sum xy}{N\sigma_X\sigma_Y}$$

離均差交叉乘積和

$$CP = \sum xy = \sum(X - \mu_x)(Y - \mu_y)$$

共變數 $$C_{XY} = \frac{\sum(X - \mu_x)(Y - \mu_y)}{N}$$

因此，積差相關便是X與Y的共變數（C_{XY}）除以X的標準（σ_X）差與Y的標準差（σ_Y）。亦即：

$$\rho_{XY} = \frac{\sum(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)}{N\sigma_X\sigma_Y} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X\ \sigma_Y}$$

表 7-2　利用共變數求相關係數

學生	X	Y	x	y	x^2	y^2	xy
A	2	11	−5	5	25	25	−25
B	4	6	−3	0	9	0	0
C	5	10	−2	4	4	16	−8
D	5	4	−2	−2	4	4	4
E	8	8	1	2	1	4	2
F	9	6	2	0	4	0	0
G	8	3	1	−3	1	9	−3
H	10	4	3	−2	9	4	−6
I	12	2	5	−4	25	16	−20
	63	54	0	0	82	78	−56

$$\mu_x = \frac{63}{9} = 7.00 \qquad \mu_y = \frac{54}{9} = 6.00$$

$$\sigma_X = 82 \qquad \sigma_Y = 78$$

$$S_x = \sqrt{\frac{82}{9}} = 3.02 \qquad S_y = \sqrt{\frac{78}{9}} = 2.94$$

$$CP = -56 \qquad C_{xy} = \frac{-56}{9} = -6.22$$

公式 7-6：

$$\rho = \frac{-6.22}{(3.02)(2.94)} = -.70$$

公式 7-7：

$$\rho = \frac{-56}{\sqrt{82}\sqrt{78}} = -.70$$

$$\rho_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{N}}{N\sqrt{\frac{\sum (X - \mu_X)^2}{N}}\sqrt{\frac{\sum (Y - \mu_Y)^2}{N}}}$$

$$= \frac{\sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{N}}{\sqrt{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}}\sqrt{\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{N}}}$$

表 7-3　由原始分數用運算公式求積差相關

學生	X	Y	X^2	Y^2	XY
A	11	12	121	144	132
B	10	9	100	81	90
C	6	9	36	81	54
D	5	7	25	49	35
E	3	5	9	25	15
F	7	5	49	25	35
G	3	6	9	36	18
H	8	6	64	36	48
I	9	10	81	100	90
J	2	3	4	9	6
	64	**72**	**498**	**586**	**523**

$$\rho = \frac{523 - \frac{(64)(72)}{10}}{\sqrt{498 - \frac{(64)^2}{10}}\sqrt{586 - \frac{(72)^2}{10}}}$$

$$= \frac{62.2}{\sqrt{88.4}\sqrt{67.6}}$$

$$= .80$$

〔公式 7-10〕

例6-1　表6-1這十名學生高中成績和大學聯考成績間的關聯性如何？

由定義公式計算相關係數：

$$\rho_{XY}=\frac{\sum z_X z_Y}{N}=\frac{8.048}{10}=.80$$

由運算公式計算相關係數：

$$\rho_{XY}=\frac{\sum XY-\frac{\sum X\sum Y}{N}}{\sqrt{\sum X^2-\frac{(\sum X)^2}{N}}\sqrt{\sum Y^2-\frac{(\sum Y)^2}{N}}}=\frac{523-\frac{(64)(72)}{10}}{\sqrt{498-\frac{(64)^2}{10}}\sqrt{586-\frac{(72)^2}{10}}}=.80$$

相關係數的解釋和應用

一、相關係數的意義與樣本大小有關

二、相關係數的大小不與ρ值成正比

→相關係數非等比級數（ex. $\rho=0.8\neq0.4\times2$）

三、相關的意義並不一定隱含有因果關係

四、相關係數沒有單位，可以進行跨樣本的比較

五、相關的大小需經顯著性檢定來證明是否顯著(是否有統計上的意義)，在進行統計前應先畫散佈圖（是否有線性關係）。

表 7-4　當 $\alpha=.05$ 和 $\alpha=.01$ 時，N 的大小與 ρ 值的關係

N	df	$\alpha=.05$	$\alpha=.01$
3	1	.997	.9999
5	3	.878	.959
10	8	.632	.765
20	18	.444	.561
30	28	.361	.463
52	50	.273	.354
102	100	.195	.254

相關係數與變異數、共變數之間的關係

1. 變異數（variance）是分散情形的指標，表示一個團體內各成員在某一變項方面的個別差異大小。共變數（covariance）是關聯性的指標，表示一群人的兩個變項之間共變的情形。

2. 變異數的特點在同一變數本身「自乘」，共變數的特點在不同變數之間「交乘」。

3.

$$SS = \sum (X - \mu_x)^2$$

$$= \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}$$

$$CP = \sum (X - \mu_x)(Y - \mu_y)$$

$$= \sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{N}$$

$$\sigma_X^2 = \frac{\sum (X - \mu_x)^2}{N}$$

$$= \frac{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}}{N}$$

$$C_{XY} = \frac{\sum (X - \mu_x)(Y - \mu_y)}{N}$$

$$= \frac{\sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{N}}{N}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{\sum (X - \mu_x)^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}}{N}}$$

$$\rho_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{CP}{\sqrt{SS_X}\sqrt{SS_Y}}$$

$$= \frac{\sum (X - \mu_x)(Y - \mu_y)}{\sqrt{\sum (X - \mu_x)^2}\sqrt{\sum (Y - \mu_y)^2}}$$

$$= \frac{\sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{N}}{\sqrt{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}}\sqrt{\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{N}}}$$

4. 相關係數是X變數和Y變數各化為z分數後的共變數；共變數是X變數和Y變數尚未標準分數化之前的相關係數。

這兩種指標都是用來描述兩個變項間共同變化程度的量數。在使用相關係數時，X變項和Y變項的單位相同；在使用共變數時，X變項和Y變項的單位卻不一定相同。

共變數是正的，相關係數便是正的；共變數是負的，相關係數便是負的。

5. 因為 $\rho_{XY} = \dfrac{C_{XY},}{\sigma_X \sigma_Y}$

所以共變數 $C_{XY} = \rho_{XY}\ \sigma_X \sigma_Y$

和的變異數

在計算測驗總分的變異數時，需要使用個別分數之變異數和共變數。測驗總分的變異數可表示如下：

$$\sigma^2_{(X+Y)} = \frac{\sum[(X+Y)-(\mu_x+\mu_y)]^2}{N} = \frac{\sum[(X-\mu_x)+(Y-\mu_y)]^2}{N}$$

$$= \sigma^2_X + \sigma^2_Y + 2\rho_{XY}\,\sigma_X\sigma_Y$$

表 7-6　和的變異數

學生	X	Y	$(X+Y)$	$(X+Y)^2$
A	11	12	23	529
B	10	9	19	361
C	6	9	15	225
D	5	7	12	144
E	3	5	8	64
F	7	5	12	144
G	3	6	9	81
H	8	6	14	196
I	9	10	19	361
J	2	3	5	25
			136	**2130**

$\sigma_x^2 = 8.84$

$\sigma_y^2 = 6.76$

$C_{XY} = 6.22$

$\rho_{XY} = 0.8046$

$$\sigma^2_{(X+Y)} = \frac{2130 - \frac{(136)^2}{10}}{10}$$

$$= 28.04$$

$$\sigma^2_{(X+Y)} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y + 2\rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y$$

$$= 8.84 + 6.76 + 2(.8046)\sqrt{8.84}\sqrt{6.76}$$

$$= 8.84 + 6.76 + 2(6.22)$$

$$= 28.04$$

差的變異數

$$\sigma^2_{(X-Y)} = \frac{\sum[(X-Y)-(\mu_x-\mu_y)]^2}{N} = \frac{\sum[(X-\mu_x)-(Y-\mu_y)]^2}{N}$$

$$= \sigma^2_X + \sigma^2_Y - 2\rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y$$

當 $\rho_{XY}=0$， $\sigma^2_{(X-Y)}=\sigma^2_X+\sigma^2_Y$。換言之，當兩套分數彼此獨立、毫無關聯時，差的變異數等於第一套分數的變異數加第二套分數的變異數。

表 7-7　差的變異數

學生	X	Y	$X-Y$	$(X-Y)^2$
A	11	12	−1	1
B	10	9	1	1
C	6	9	−3	9
D	5	7	−2	4
E	3	5	−2	4
F	7	5	2	4
G	3	6	−3	9
H	8	6	2	4
I	9	10	−1	1
J	2	3	−1	1
			−8	38

$$\sigma^2_{(X-Y)} = \frac{38-\frac{(-8)^2}{10}}{10} = 3.16$$

$$\sigma^2_{(X-Y)} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y - 2\rho_{XY}S_XS_Y$$

$$= 8.84 + 6.76 - 2(.8046)\sqrt{8.84}\ \sqrt{6.76}$$

$$= 8.84 + 6.76 - 2(6.22)$$

$$= 3.16$$

例6-2　某英文教師將學生的英文學科測驗成績（X）與英文聽力測驗成績（Y）相加作為英文學期成績。十名學生該兩項測驗成績、變異數和相關係數如表6-3和6-4所示。問學科測驗成績的變異數及聽力測驗成績的變異數與學期成績的變異數之間有何關係存在？

Ans：

- 和的變異數

$$\sigma^2_{(X+Y)} = \frac{2130 - \frac{(136)^2}{10}}{10} = 28.04$$

或

$$\sigma^2_{(X+Y)} = 8.84 + 6.76 + 2(.8046)\sqrt{8.84}\sqrt{6.76} = 28.04$$

- 差的變異數

$$\sigma^2_{(X-Y)} = \frac{38 - \frac{(-8)^2}{10}}{10} = 3.16$$

或

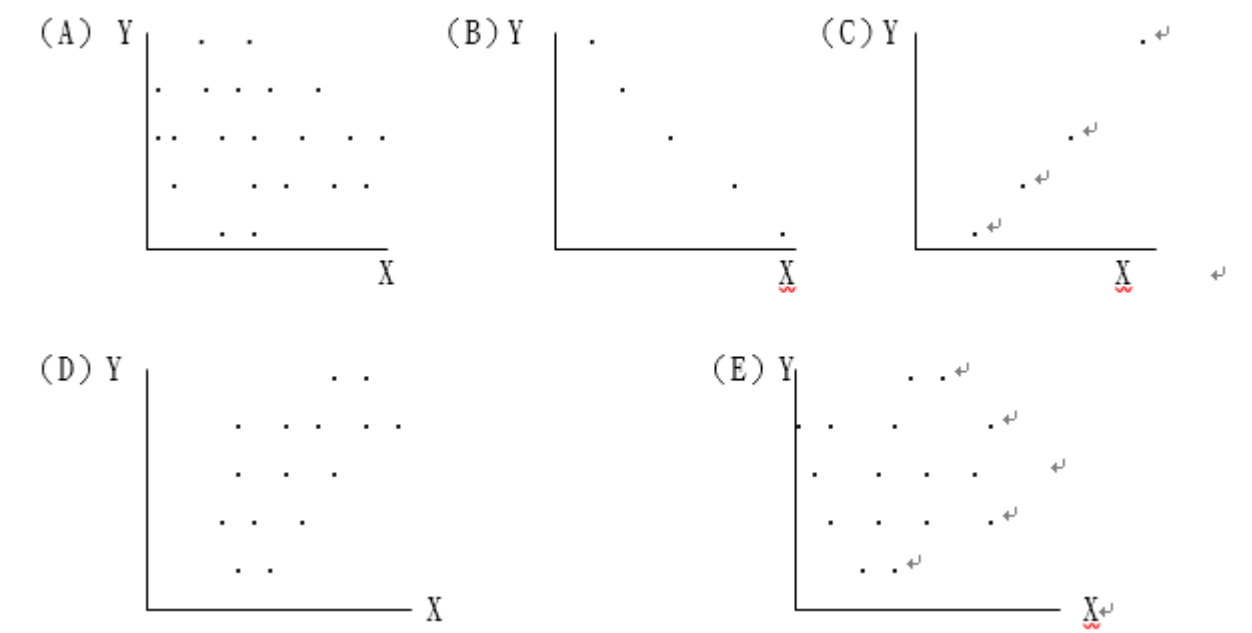
$$\sigma^2_{(X-Y)} = 8.84 + 6.76 - 2(.8046)\sqrt{8.84}\sqrt{6.76} = 3.16$$

其他相關係數

Y \ X	名義	次序	連續
名義（類別）	ϕ、c、V_C、Kappa		
次序		r_s（Spearman’ s r）τ、w	連續可分類為次序
連續	$r_{p\cdot bis}$（點二系列）r_{bis}（二系列）η^2		Pearsons r

例題示範

- 第1~4題，請參考下列圖(A)至圖(E)作答



1. 何者為r＝＋1.00？
2. 何者為r＝＋.50？
3. 何者為r＝.00？
4. 何者為r＝－1.00？

例題示範

- 下列哪一個相關係數最強？
  （A）.75 （B）.53 （C）-.87 （D）-1.0

- 假設有一筆資料，已知S_X＝15且S_Y＝3，請問共變數的最大可能值是多少？

- 假設X與Y之間沒有任何關聯存在，且已知S_X＝5，S_Y＝4；則請問X與Y的差所構成之分配的標準差為何？

例題示範

- 假設$r_{x.y}=0.6$，且已知$S_X=4$ ，$S_Y=3$；則請問
  (1)X與Y的和所構成之分配的標準差為何？
  (2)X與Y的差所構成之分配的標準差為何？

- 以下是8位學生的X和Y變數，請問
  (1)兩者的相關為何？是否達顯著水準（$\alpha=.05$）？你的結論為何？
  (2)請畫出散佈圖，說明所求得的r是否合理？

X	6	4	7	5	2	2	3	8
Y	4	5	5	6	2	4	3	9

迴歸

- 1855年英國Galton以 “regression toward mediocrity in heredity stature” ，分析孩童身高與父母身高之間的關係
- 父母身高可預測子女身高
  - 父母身高越高或越矮，子女身高會有相同的傾向
  - 但有趣的是，當父母身高值極端化之後（極高、極矮時），子女的身高並不會極端化，反而朝向平均數移動
  - 可思考與中央極限定理概念的類比

簡單直線迴歸與預測

簡單迴歸分析是最簡單的預測工作，它是以一個變項來預測另一個變項的統計方法。這種預測方法的基礎是兩個變項間具有相關存在。

- 迴歸原理
  - 連續變項的線性關係能以一最具代表性的直線來表示
  - 線性方程式$Y' = bX + a$ ，b為斜率，a為截距
  - 某個X值，可取得對應Y的預測值
  - 單一獨變項X來預測依變項Y，為簡單迴歸

以 例8-1 說明

表7-3是去年十名高中畢業生的高中成績(X_i)和大學聯考成績(Y_i)。試根據此項資料求一預測公式。

- 這裡的高中成績(X_i)是用來預測的變項，就叫做「**預測變項**」(predictor)
- 大學聯考成績(Y_i)是被預測的變項，就叫做「**效標變項**」(criterion)

像這樣只有一個預測變項的研究，就叫作「**簡單直線迴歸分析**」(simple linear regression analysis)。簡單，指的是只有一個預測變項。直線，則表示X-Y之間的函數關係為一次方(linear)，即畫出來的函數線(迴歸線)是直線的。

學生	高中成績	大學聯考成績
A	11	12
B	10	9
C	6	9
D	5	7
E	3	5
F	7	5
G	3	6
H	8	6
I	9	10
J	2	3

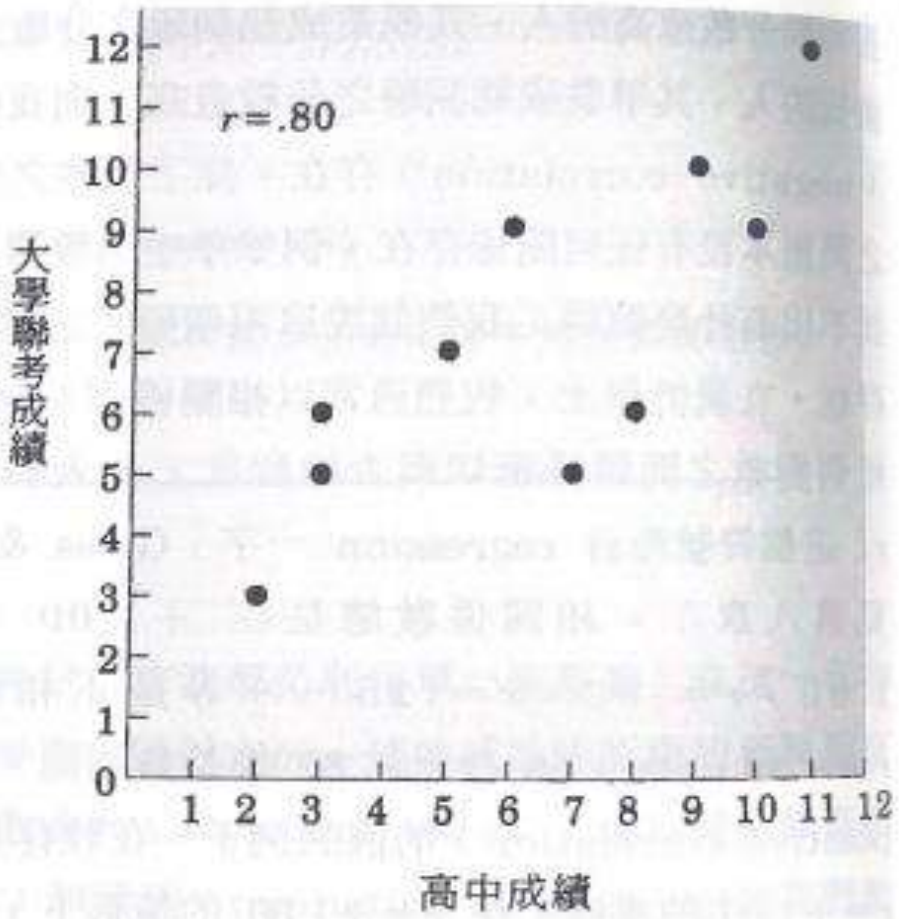


圖 7-2　正相關

- 根據圖7-2，高中成績和大學聯考成績的資料約呈左下角到右上角的分布趨勢。

- 根據這種趨勢，研究者可以想像有一條直線通過各點附近，使這一條線最能代表這些點所形成的趨勢，這條線便稱作「最適合線」（best-fit line）。

- 要使這一條線最能代表各點，最好的方法叫做「**最小平方法**」（method of least square）。即設法找出一條斜線，使各點至此線之平行於Y軸的距離的平方和變為最小。這條直線便是研究者從X變項預測Y變項的最適合線，也叫做迴歸線

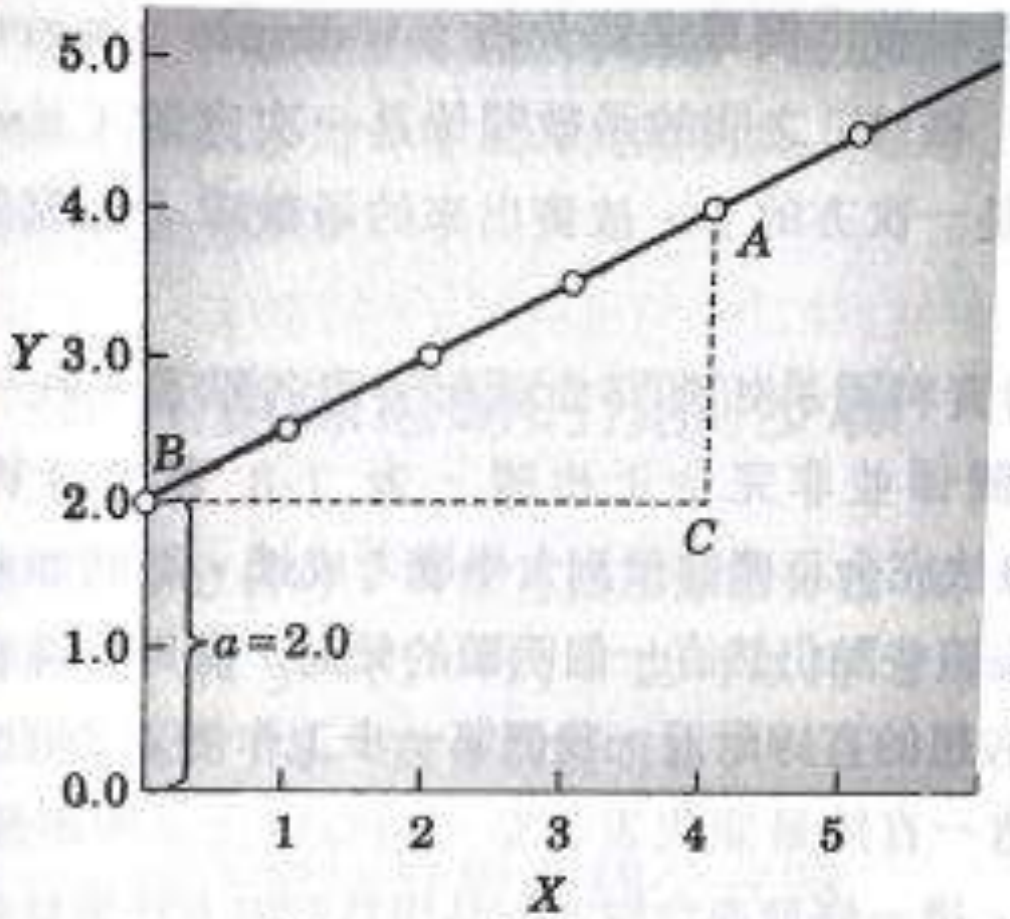
迴歸方程式的建立—利用原始分數迴歸公式

- 我們可使用線性函數來表示任一條直線：

$$\hat{Y} = bX + a$$

- 而使各點至此線之平行於Y軸的距離平方和變為最小，也就是使：

$$\Sigma\left(Y - \hat{Y}\right)^2 = \Sigma\left(Y - bX - a\right)^2 = \text{最小}$$



斜率 b：$\frac{AC}{BC}=.5$

截距 a：2.0

X	0	1	2	3	4	5
Y	2	2.5	3	3.5	4	4.5

圖 8-1　斜線 Y 的斜率 (b) 和截距 (a)

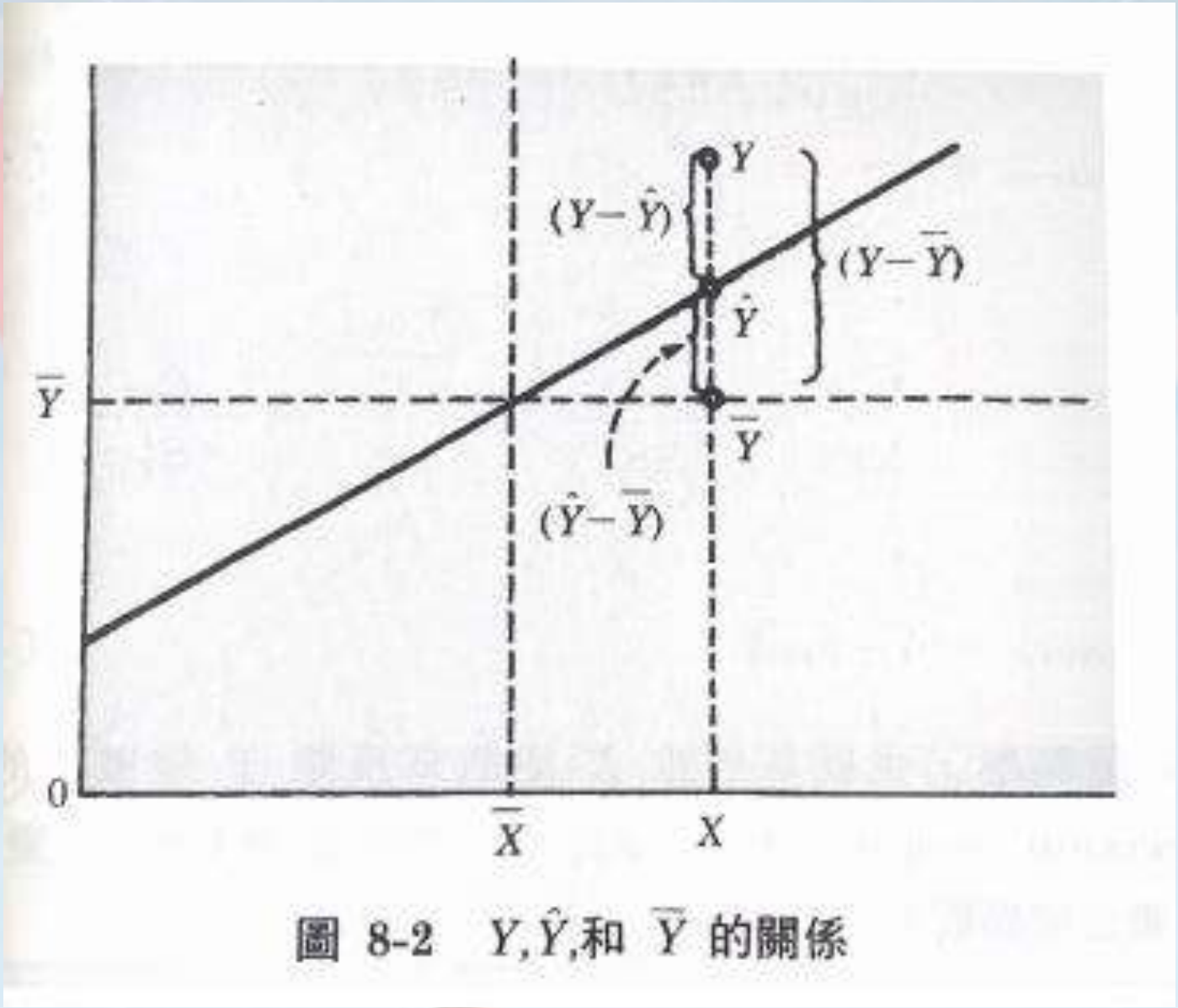


圖 8-2　$Y, \hat{Y}$,和 $\bar{Y}$ 的關係

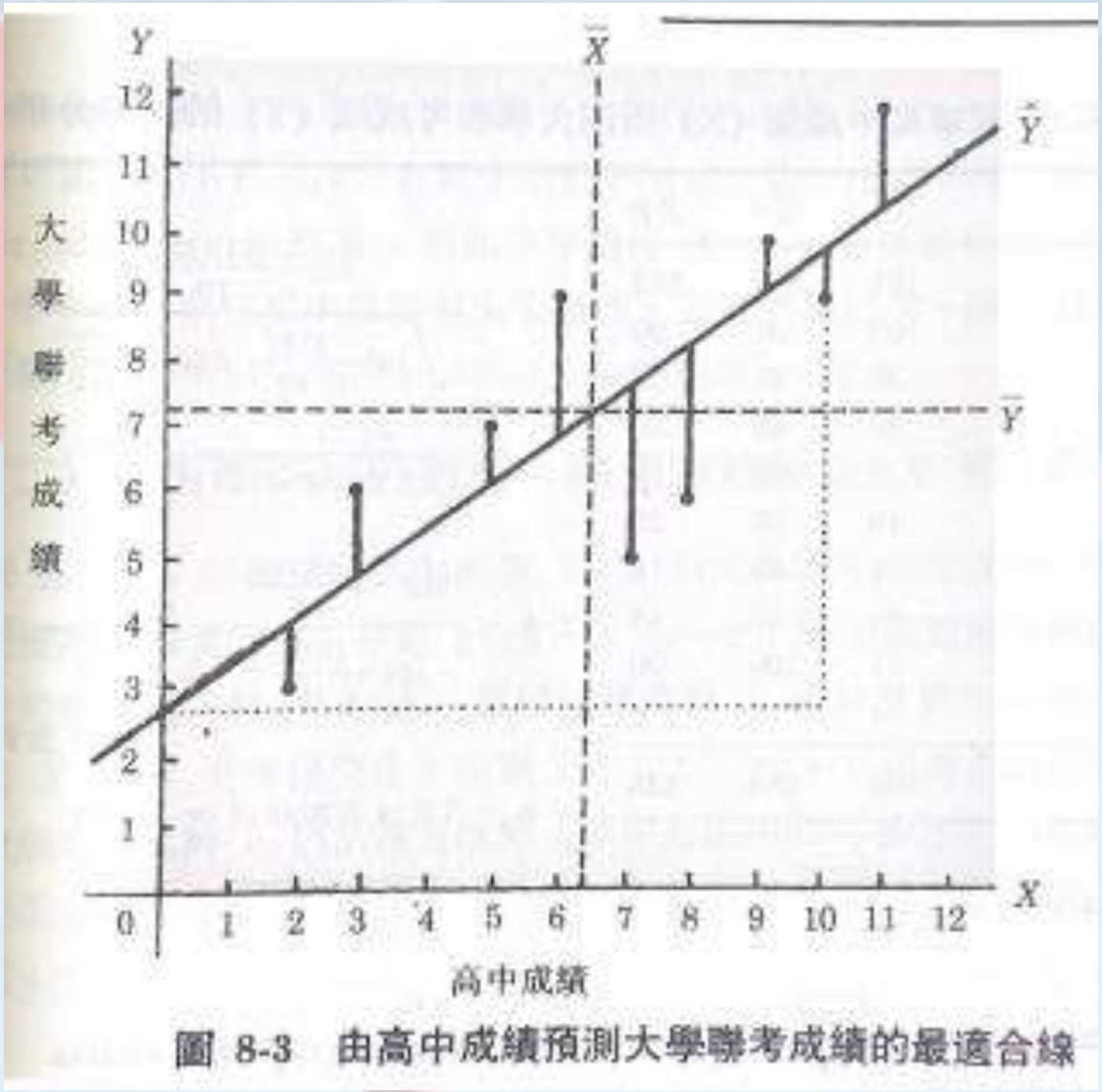


圖 8-3　由高中成績預測大學聯考成績的最適合線

$$\sum\left(Y-\hat{Y}\right)^2=\sum\left(Y-bX-a\right)^2=\text{最小}$$

則：

$$b_{Y\cdot X}=\frac{\sum XY-\frac{\sum X\sum Y}{N}}{\sum X^2-\frac{\left(\sum X\right)^2}{N}}=\frac{\sum xy}{\sum x^2}=\frac{CP}{SS_x}=\frac{\frac{\sum xy}{N}}{\frac{\sum x^2}{N}}=\frac{C_{XY}}{\sigma_X^2}$$

$$a_{Y\cdot X}=\overline{Y}-b_{Y\cdot X}\,\overline{X}$$

$b_{Y\cdot X}$ 是斜率，也就是根據X變數來預測Y變數的「迴歸係數」（regression coefficient）。

表 8-1　根據高中成績 (X) 預測大學聯考成績 (Y) 的迴歸分析

學生	X	Y	X^2	Y^2	XY
A	11	12	121	144	132
B	10	9	100	81	90
C	6	9	36	81	54
D	5	7	25	49	35
E	3	5	9	25	15
F	7	5	49	25	35
G	3	6	9	36	18
H	8	6	64	36	48
I	9	10	81	100	90
J	2	3	4	9	6
	64	**72**	**498**	**586**	**523**

$$\overline{X} = 6.4 \qquad S_X = \sqrt{\frac{88.4}{10}} = 2.97$$

$$\overline{Y} = 7.2 \qquad S_Y = \sqrt{\frac{67.6}{10}} = 2.60$$

① $$r = \frac{523 - \frac{(64)(72)}{10}}{\sqrt{498 - \frac{(64)^2}{10}}\sqrt{586 - \frac{(72)^2}{10}}}$$

$$= \frac{62.20}{\sqrt{88.40}\sqrt{67.60}} = .8046$$

② $$b = \frac{523 - \frac{(64)(72)}{10}}{498 - \frac{(64)^2}{10}} = \frac{62.20}{88.40} = .7036$$

（公式 8-4）

$$a = 7.2 - (.7036)(6.4) = 2.6970$$

③ $$\hat{Y} = .7036X_i + 2.6970$$

$$\hat{z}_Y = .8046z_X$$

④ $$X = 4.0$$

$$\hat{Y} = (.7036)(4.0) + 2.6970 = 5.5114$$

⑤ $SS_t = 586 - \frac{(72)^2}{10} = 67.6$

$$SS_{reg} = \frac{\left[523 - \frac{(64)(72)}{10}\right]^2}{498 - \frac{(64)^2}{10}} = 43.7652 \qquad \text{（公式 8-13）}$$

$SS_{res} = 67.6 - 43.7652 = 23.8348$ （公式 8-14）

⑥ $r^2 = (.8046)^2 = .6474$ 或

$r^2 = \frac{43.7652}{67.6} = .6474$ （公式 8-16）

⑦ $s_{Y\cdot X} = \sqrt{\frac{23.8348}{10-2}} = \sqrt{2.9794} = 1.7261$ （公式 8-19）

⑧ $X = 4.0$，$\hat{Y} = 5.5114$，這位學生將有 .9544 的概率，其聯考成績會落在 $5.5114 \pm 2(1.7261)$，亦即 2.0592~8.9636 之間。

迴歸方程式的建立～利用離均差分數（將原點移軸至 $\bar{X}$ 和 $\bar{Y}$ 時）

假定使用離均差分數，亦即 $x = X - \bar{X}$ ，$y = Y - \bar{Y}$ 來作迴歸分析的資料時，就相當於把縱軸移軸到 $\bar{X}$ 處，把橫軸移軸到 $\bar{Y}$ 處的意思。

$$\hat{Y} = bX + a = \bar{Y} + bx$$

$$\left(\hat{Y} - \bar{Y}\right) = bx$$

$$\hat{y} = bx$$

移項得：

$$b = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

公式中，截距a已經消失，但斜率b保持不變：

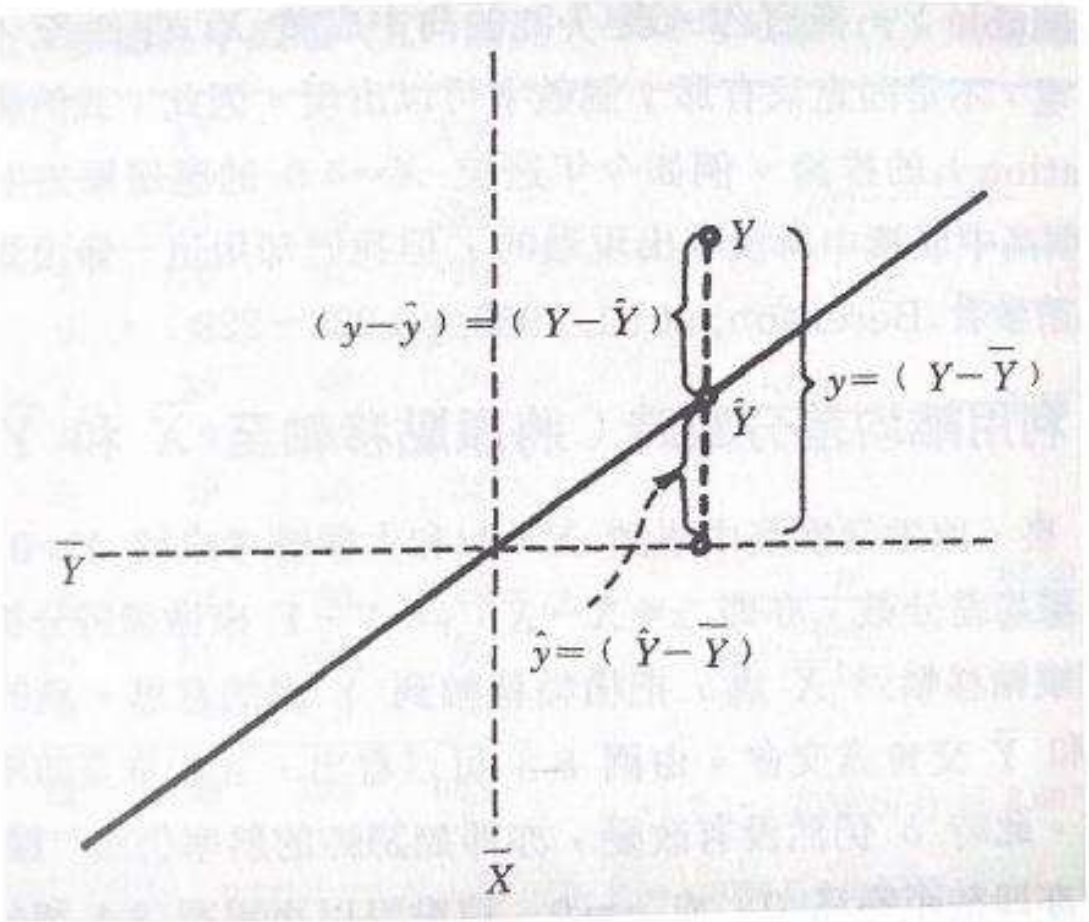


圖 8-4　移軸到平均數（$\overline{X}$，$\overline{Y}$）時，截距 a 變爲 0，但斜率 b 則仍保持不變。

迴歸方程式的建立—
利用標準分數化迴歸公式

標準分數化迴歸係數（β）是假定將預測變數X_i化為z_x分數，效標變項Y_i分數也化為z_y分數，所得的標準化分數迴歸係數。

因為X和Y軸所除的數值不一樣，軸長比例尺發生改變，斜率就會發生改變，此時的斜率變為β，而不再是b，β沒有特定單位。

$$\hat{y} = bx$$

$$\Rightarrow \quad \hat{z}_Y = \left(b \frac{S_X}{S_Y} \right) z_X$$

$$\Rightarrow \quad \hat{z}_Y = \beta z_X$$

這便是標準分數化迴歸公式，而 β 便是「**標準分數化迴歸係數**」。

$$\beta = b \frac{S_X}{S_Y}$$

在只有一個預測變項時，標準分數化迴歸係數β正好等於相關係數ρ。

$$\rho_{XY} = b\frac{S_X}{S_Y} = \beta$$

總離均差平方和

以預測大學聯考成績為例，假使只知道某位學生是高三應屆生，而不知道他的高中成績X多少，此時如果要預測他的大學聯考成績Y多少，最好的策略是以大學聯考的平均數$\bar{Y}$來預測之。如果我們猜他聯考成績可以得到$\bar{Y}$，而實際上他考了Y，則此時猜測的誤差便是（$Y-\bar{Y}$）。

總離均差平方和

N個人便有N個這樣的誤差。這誤差習慣上我們可求其離均差平方和，然後再加總，稱為「**總離均差平方和**」，有時稱為總變異，以SS_t（即SS_Y）表示：

$$SS_t = \sum y^2 = \sum \left(Y - \overline{Y}\right)^2 = \sum Y^2 - \frac{\left(\sum Y\right)^2}{N}$$

總離均差平方和

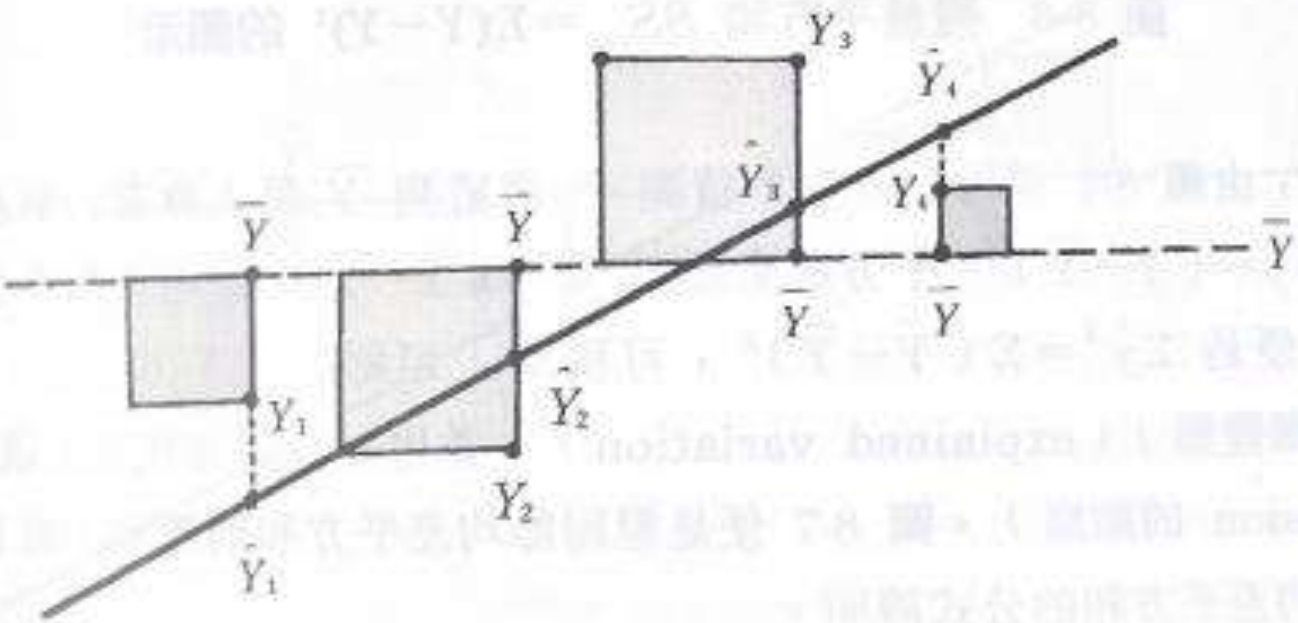


圖 8-5　總離均差平方和 $SS_t=\Sigma(Y-\bar{Y})^2$ 的圖示

殘差平方和

當有了預測公式，而且知道每一位學生的高中成績X_i時，就不像上面那樣用效標變項的平均數$\bar{Y}$來猜測了。此時我們寧願猜$\hat{Y}$，亦即，可根據預測公式來預測。此時猜測的誤差只有（$Y-\hat{Y}$），差值$Y-Y'$稱為**殘差**（residual），表示利用迴歸方程式無法準確預測的誤差。

再將（$Y-\hat{Y}$）平方起來，得（$Y-\hat{Y}$）^{2}，N個人這些總和便是 Σ（$Y-\hat{Y}$）^{2} ，稱為「殘差平方和」，有時稱為「非被解釋變異」，以SS_{res}表示。

殘差平方和

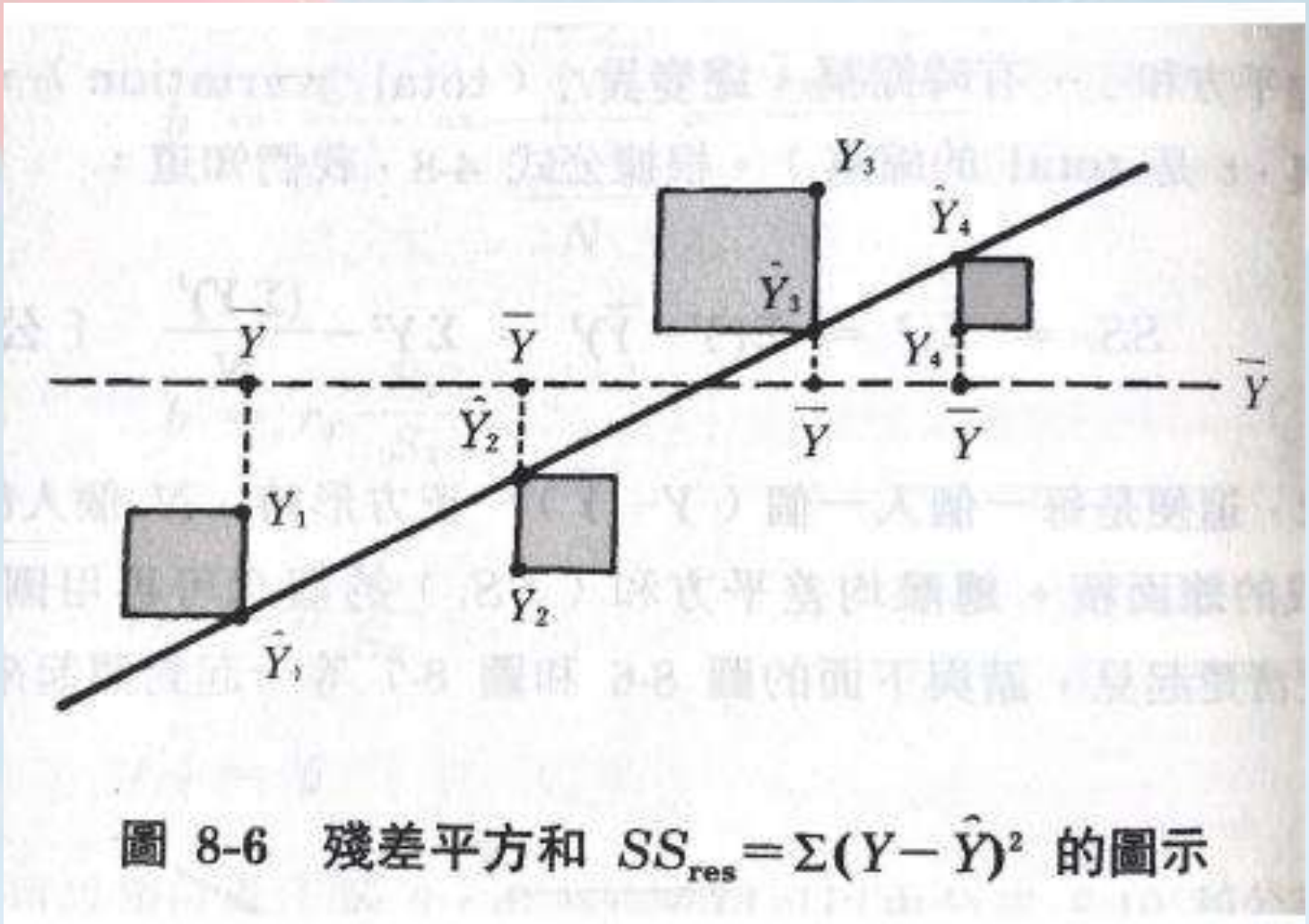


圖 8-6　殘差平方和 $SS_{res}=\Sigma(Y-\hat{Y})^2$ 的圖示

迴歸離均差平方和

猜測 $\hat{Y}$ 與猜測 $\overline{Y}$ 每人會有一段差距，這一差值為 $\hat{y} = \left(\hat{Y} - \overline{Y}\right)$。平方起來便是 $\hat{y}^2 = \left(\hat{Y} - \overline{Y}\right)^2$。把全部學生的這些值相加，便是 $\sum \hat{y}^2 = \Sigma\left(\hat{Y} - \overline{Y}\right)^2$，可稱為「迴歸離均差平方和」，亦可稱為「被解釋變異」，並用 SS_{reg} 表示：

$$SS_{reg} = \Sigma\left(\hat{Y} - \overline{Y}\right)^2 = \frac{\left[\sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{N}\right]^2}{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}}$$

迴歸離均差平方和

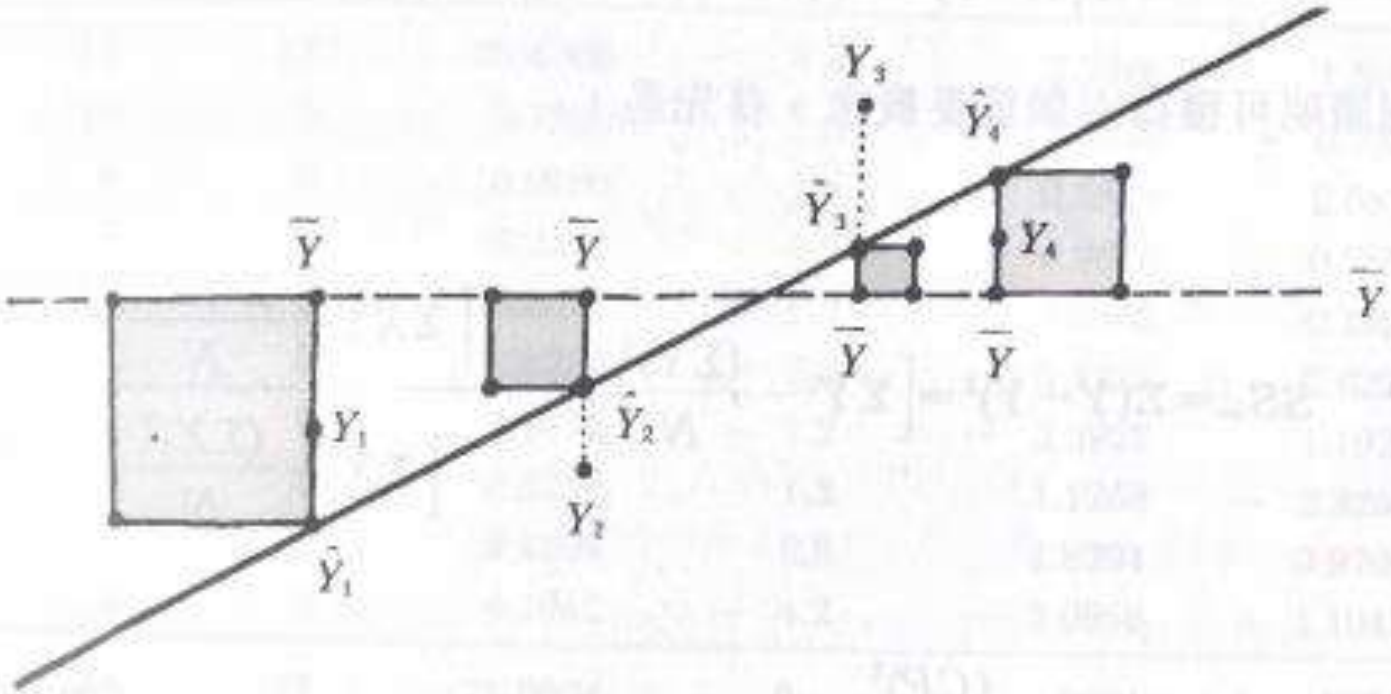


圖 8-7　迴歸離均差平方和 $SS_{reg}=\Sigma(\hat{Y}-\bar{Y})^2$ 的圖示

重要概念

總離均差平方和＝迴歸離均差平方和＋殘差平方和

$$\sum(Y-\bar{Y})^2=\sum(\hat{Y}-\bar{Y})^2+\sum(Y-\hat{Y})^2$$

$$SS_t \quad = \quad SS_{reg} \quad + \quad SS_{res}$$

（總變異　＝　被解釋變異＋非被解釋變異）

SS_t，SS_{reg}，SS_{res}的計算（使用不同公式）

表 8-3 SS_t，SS_{reg}，SS_{res} 的計算

學生	X	Y	$\hat{Y}$	$(Y-\bar{Y})$	$(\hat{Y}-\bar{Y})$	$(Y-\hat{Y})$
A	11	12	10.4366	4.8	3.2366	1.5634
B	10	9	9.7330	1.8	2.5330	− 0.7330
C	6	9	6.9186	1.8	− 0.2814	2.0814
D	5	7	6.2150	− 0.2	− 0.9850	0.7850
E	3	5	4.8078	− 2.2	− 2.3922	0.1922
F	7	5	7.6222	− 2.2	0.4222	− 2.6222
G	3	6	4.8078	− 1.2	− 2.3922	1.1922
H	8	6	8.3258	− 1.2	1.1258	− 2.3258
I	9	10	9.0294	2.8	1.8294	0.9706
J	2	3	4.1042	− 4.2	− 3.0958	− 1.1042
和	64	72	72.0004	0	.0004	− .0004
平方和	498	586	562.1684	67.6	43.7627	23.8348

$$SS_t = \Sigma (Y - \bar{Y})^2 = 67.6$$

$$SS_{reg} = \Sigma (\hat{Y} - \bar{Y})^2 = 43.7627$$

$$SS_{res} = \Sigma (Y - \hat{Y})^2 = 23.8348$$

$$\because SS_t = SS_{reg} + SS_{res}$$

$$\therefore 67.6 \fallingdotseq 43.7627 + 23.8348$$

（稍具有進位誤差）

決定係數

$SS_{res} = \Sigma (Y - \bar{Y})^2$可想為是根據迴歸公式預測錯誤的部分，

$SS_{reg} = \Sigma (\hat{Y} - \bar{Y})^2$便是預測正確的部分。

$$\frac{SS_{reg}}{SS_t} = \frac{\left(\sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{N}\right)^2}{\left[\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}\right]\left[\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{N}\right]} = r^2$$

由此可見$\Sigma(\hat{Y}-\bar{Y})^2$與$\Sigma(Y-\bar{Y})^2$的比值正好是相關係數的平方，這個比值$r^2$就叫做「決定係數」，用以表示「在效標變項Y的總變異之中，由預測變項X所解釋的變異的百分比」。換言之：

$$SS_{reg} = r^2 SS_t$$

決定係數r^2，及SS_t、SS_{reg}、SS_{res}的關係

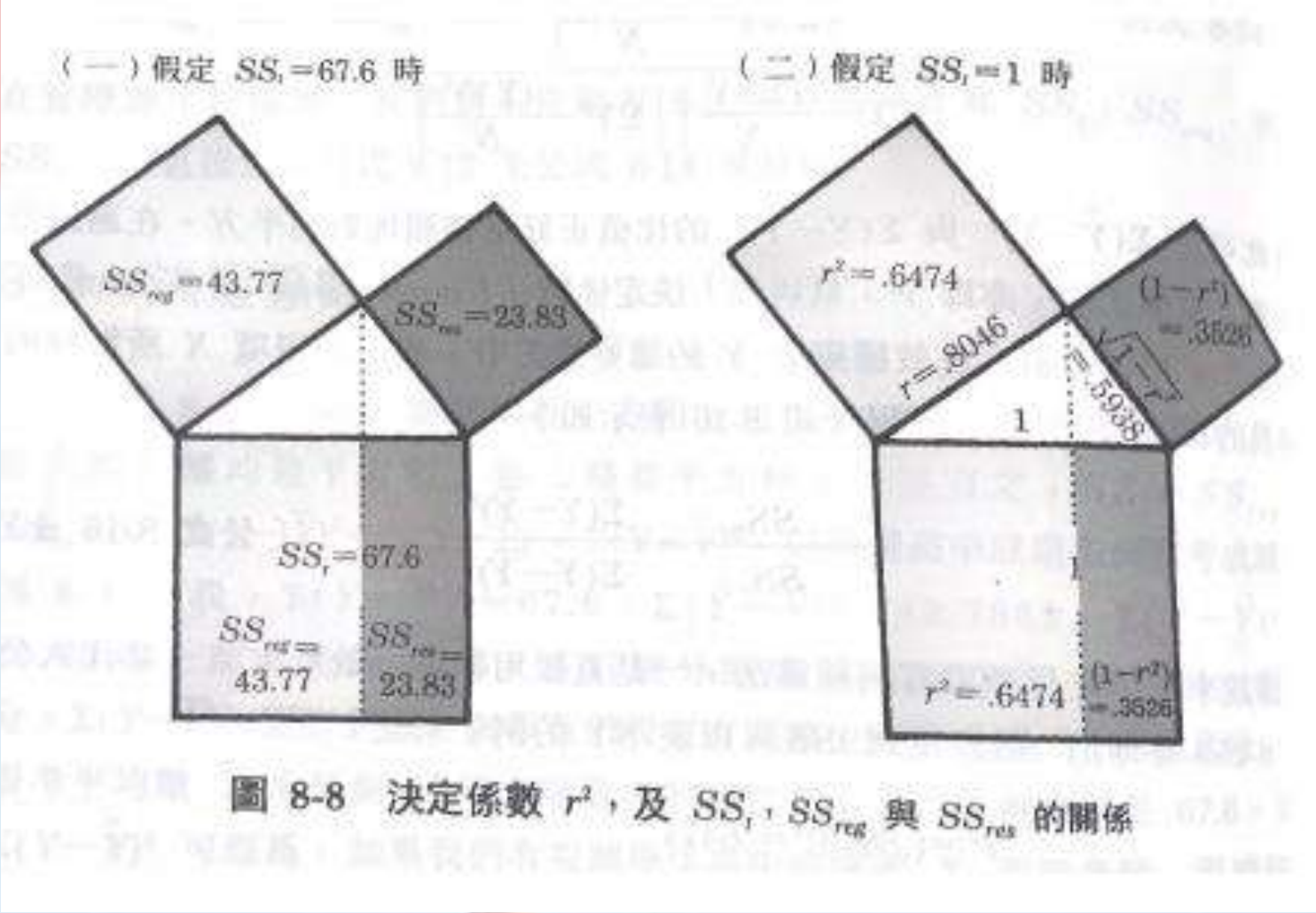


圖 8-8　決定係數 r^2，及 SS_t、SS_{reg} 與 SS_{res} 的關係

SS_t正好分割成SS_{reg}和SS_{res}兩個部分，彼此之間沒有重疊。

根據$SS_t = SS_{reg} + SS_{res}$可推導出：

$$\frac{SS_t}{SS_t} = \frac{SS_{reg}}{SS_t} + \frac{SS_{res}}{SS_t}$$

$$\Rightarrow \quad 1 \quad = \quad r^2 \quad + (1 - r^2)$$

有了相關係數，就可以知道決定係數是多少。然後便可利用下式求出SS_{reg}及SS_{res}：

$$SS_{reg} = r^2 SS_t$$

$$SS_{res} = (1 - r^2)\, SS_t$$

迴歸解釋變異量

- 迴歸解釋變異量(R^2)
  - 表示使用*X*去預測*Y*時的預測解釋力（獨變項對於依變項的解釋力）
  - 即*Y*變項被自變項所削減的誤差百分比

$$1 = \frac{SS_{reg}}{SS_t} + \frac{SS_e}{SS_t} = \frac{\sum(Y_i' - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} + \frac{\sum(Y_i - Y_i')^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}$$

決定係數

$$R^2 = 1 - \frac{SS_e}{SS_t} = \frac{SS_{reg}}{SS_t} = PRE$$

在簡單迴歸時，R=r

例題示範

例：40位學生立定跳遠與急行跳遠

（需使用EXCEL資料）

1. 迴歸公式為何？
2. 某位學生立定跳遠300公分，可預測其急行跳遠為幾公分？
3. 急行跳遠600公分，可預測其立定跳遠為何？

例題示範

1.

$$b=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\sum XY-\frac{\sum X\sum Y}{N}}{\sum X^2-\frac{(\sum X)^2}{N}}=\frac{6117692-\frac{11325\ x\ 25436}{48}}{2755635-\frac{(11325)^2}{48}}=1.391$$

$$a=\overline{Y}-b\overline{X}$$

$$=529.92-1.391\ x\ 235.94=201.619$$

- 迴歸公式：

$$\hat{Y}=1.391*X+201.619$$

例題示範

2.

$\hat{Y}=1.391*300+201.619$

$=618.919$

3.

$600=1.391*X+201.619$

$X=286.399$

例題示範

- 某班英文期中考與期末考成績如下：

期中考	85	92	63	88	90	76	78	69	82	89
期末考	88	95	68	90	95	73	72	70	89	91

1、求出Pearson r 考驗r是否顯著（$\alpha = 0.05$）。

2、若以期中考成績來預測期末考成績，請計算迴歸係數b及截距a，並寫出原始分數的迴歸方程式。

3、畫出散佈圖及最適合線(即迴歸線)

4、寫出標準分數化之迴歸公式。

5、若佳佳期中考為70分，請預測她的期末考分數。

6、計算SSt、SSreg與SSres

7、求出決定係數，並以上述資料說明此係數的意義。

8、說明決定係數與SSt、SSreg、SSres的關係。

例題示範

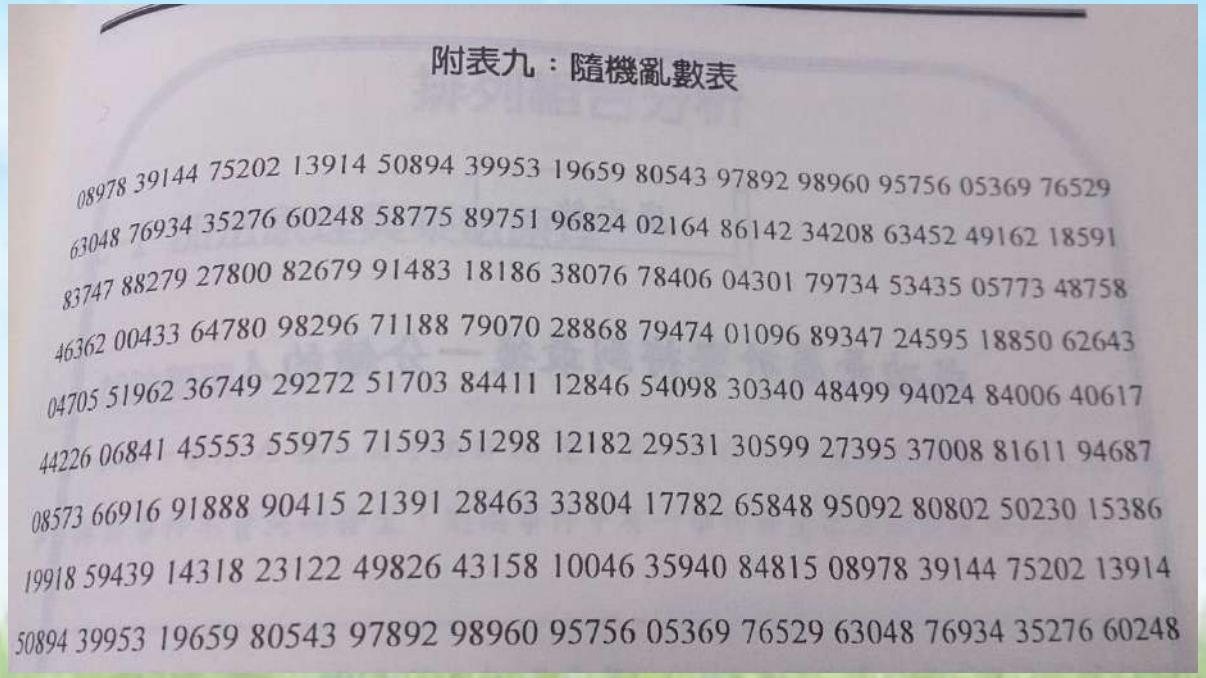
- 已知父母的平均智力(即X)($\sigma = 15$)與子女的平均智力(即Y)兼具有約.60的相關，請問預測Y的估計標準誤是多少？
- 若已知$SS_T = 100$，且$r_{xy} = .50$，則可以被解釋到的迴歸離均差平方和是多少？
- 以表1.3中的智育分數預測德育分數的原始分數預測線為何？
- 承上，若已知某生的智育分數為80，則他的德育分數可能是多少分？

（余民寧，2005）

第七章
機率分配

前言

- 簡單隨機抽樣
  - 利用亂數表來建立樣本
  - 每個個體被抽中的機率相同
  - 每個個體被抽中的可能性相互獨立



附表九：隨機亂數表

08978 39144 75202 13914 50894 39953 19659 80543 97892 98960 95756 05369 76529
63048 76934 35276 60248 58775 89751 96824 02164 86142 34208 63452 49162 18591
83747 88279 27800 82679 91483 18186 38076 78406 04301 79734 53435 05773 48758
46362 00433 64780 98296 71188 79070 28868 79474 01096 89347 24595 18850 62643
04705 51962 36749 29272 51703 84411 12846 54098 30340 48499 94024 84006 40617
44226 06841 45553 55975 71593 51298 12182 29531 30599 27395 37008 81611 94687
08573 66916 91888 90415 21391 28463 33804 17782 65848 95092 80802 50230 15386
19918 59439 14318 23122 49826 43158 10046 35940 84815 08978 39144 75202 13914
50894 39953 19659 80543 97892 98960 95756 05369 76529 63048 76934 35276 60248

二項分配

丟銅板出現正反面機率各1/2，出現正面和反面的機率和等於1。以符號p表示出現正面的機率，以符號q表示出現反面的機率，則p＋q＝1，　q＝1－p。當投n個銅板個數，所出現的正反面組合個數為2^n。

現在假定有兩個均勻無偏的銅板(n=2)，則兩個同時投擲時，就有下列四種(2^2)可能：

第一個銅板	H	H	T	T
第二個銅板	H	T	H	T

亦即，第一個銅板得正面(H)和第二個銅板得正面的機會佔 $\frac{1}{4}$；第一個銅板得正面而第二個銅板得反面(T)，**或**第一個銅板得反面而第二個銅板得正面 $\frac{2}{4}$；第一個銅板得反面和第二個銅板得反面的機會有 $\frac{1}{4}$。

這一關係可以用下式表示：

$$(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 = (\frac{1}{2})^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + (\frac{1}{2})^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}$$

二項分配的公式：

$$(p+q)^n = p^n + \frac{n}{1}p^{n-1}q^1 + \frac{n(n-1)}{1\times 2}p^{n-2}q^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}p^{n-3}q^3 + \cdots + q^n$$

上述公式裡的每一項的機率可用下列公式計算：

$$C_r^n p^r q^{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}p^r q^{n-r}$$

表 6-4　投擲十六個銅板的二項分配

正面數	期望次數	正面數	期望次數
16	1	7	11,440
15	16	6	8,008
14	120	5	4,368
13	560	4	1,820
12	1,820	3	560
11	4,368	2	120
10	8,008	1	16
9	11,440	0	1
8	12,870		65,536

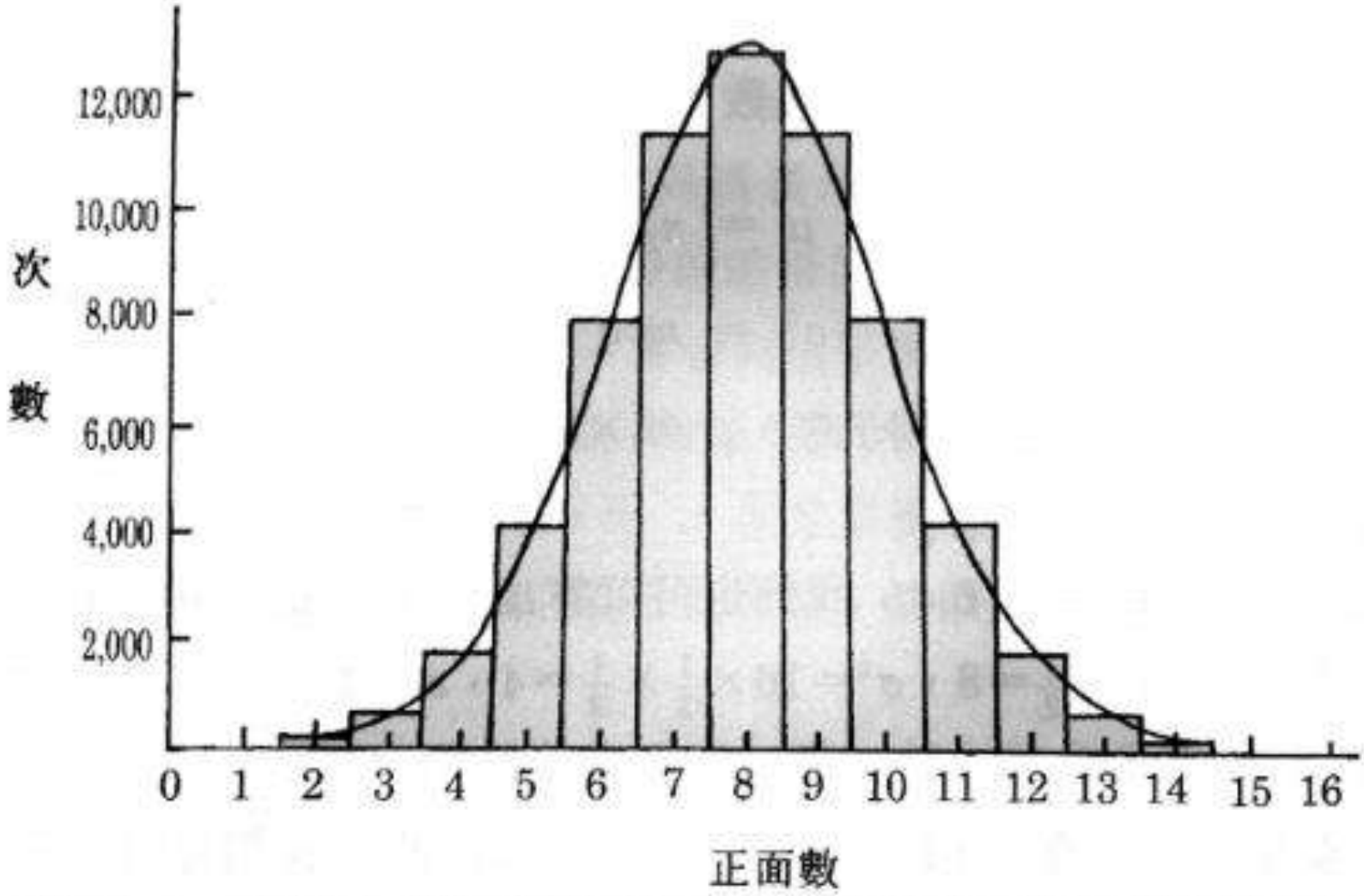


圖 6-1　投擲十六個銅板得正面數的次數分配已漸漸接近常態分配（採自 McNemar, 1969, p.47）

二項分配的平均數和標準差

平均數：$\mu = Np$

變異數：$\sigma^2 = Npq$

之後將討論的常態分配，可想像為（p＋q）^{n}的n是無限大，而且p＝q＝0.5的二項分配。

二項分配比較適用於間斷變項，而常態分配則比較適用於連續變項。當N很小時，二項分配與常態分配二者在某個 z 分數以下的面積佔總面積的比率並不相等，甚至差異很大；但隨著N逐漸增大，二者間的差異會趨近於零。

常態分配

左右對稱的鐘形曲線，稱之為常態分配曲線（normal distribution curve），理論上常態分配乃是$(p+q)^n$的n為無限大，而且p＝q＝0.5時的對稱二項分配。

常態分配

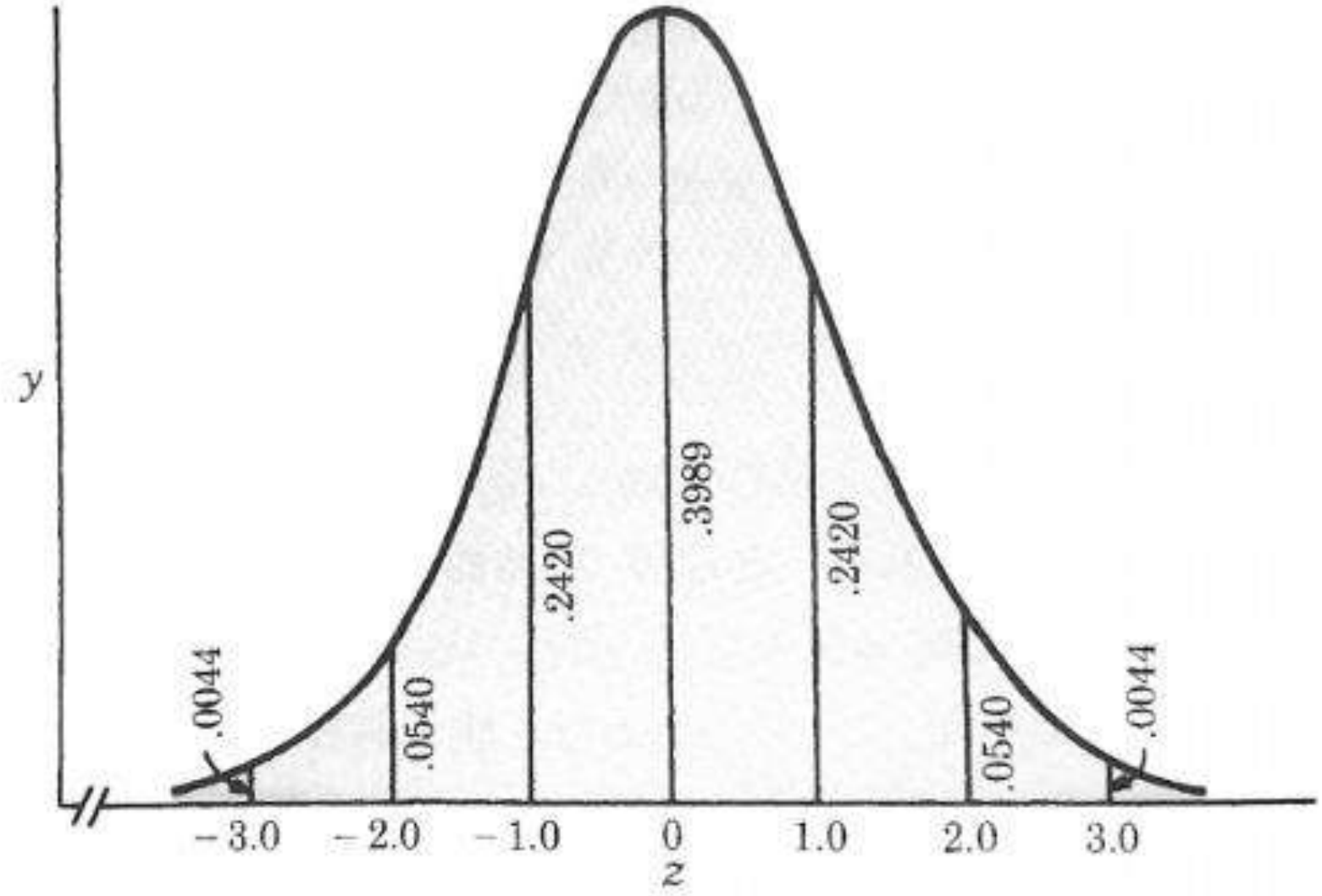
- 常態分配曲線的高度

$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

X＝測量分數，為自變數
y＝曲線的高度，亦即得X時的高度，為依變數
N＝總人數
μ＝平均數
σ＝標準差
π＝3.141593...，常數值
e＝2.718282...，自然對數之底

如果我們把原始分數都轉換成z分數，則上述公式中的平均數μ變為0，標準差σ變為1。如果再把曲線下的總面積設定為1，亦即N＝1，或總概率設定為1，則公式可簡化如下：

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = .398942 \times 2.718282^{\left(-\frac{1}{2}z^2\right)}$$


y
.0044
.0540
.2420
.3989
.2420
.0540
.0044
−3.0
−2.0
−1.0
0
1.0
2.0
3.0
z

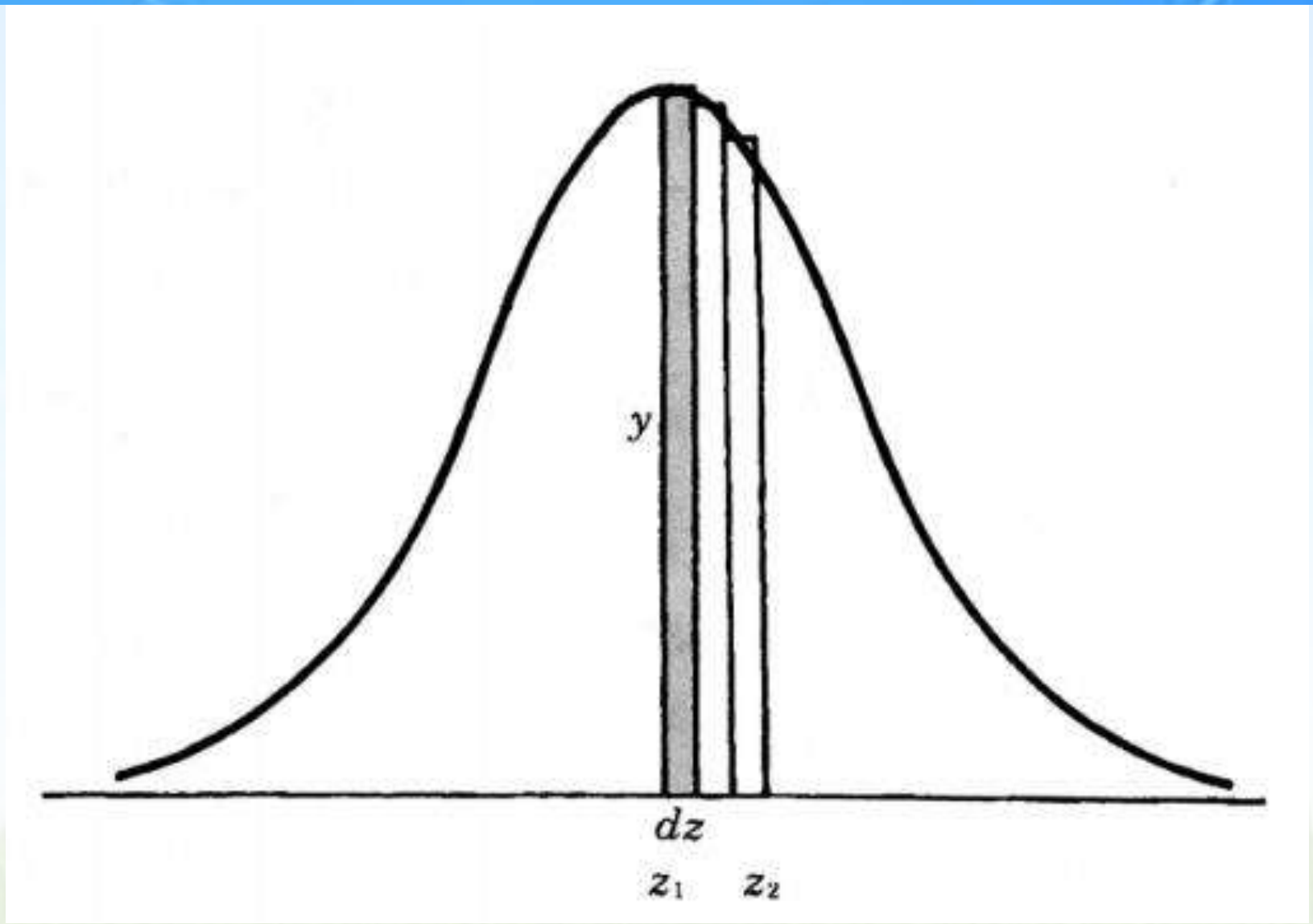
常態曲線的高度

z 值	e	y
$z=0$	$e^{0}=1$	$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=.3989$
$z=\pm1.0$	$e^{-2}=.1353$	$y=.2420$
$z=\pm2.0$	$e^{-\frac{1}{2}}=.6065$	$y=.05399$
$z=\pm3.0$	$e^{-\frac{9}{2}}=.111$	$y=.0044$

常態曲線分配的面積

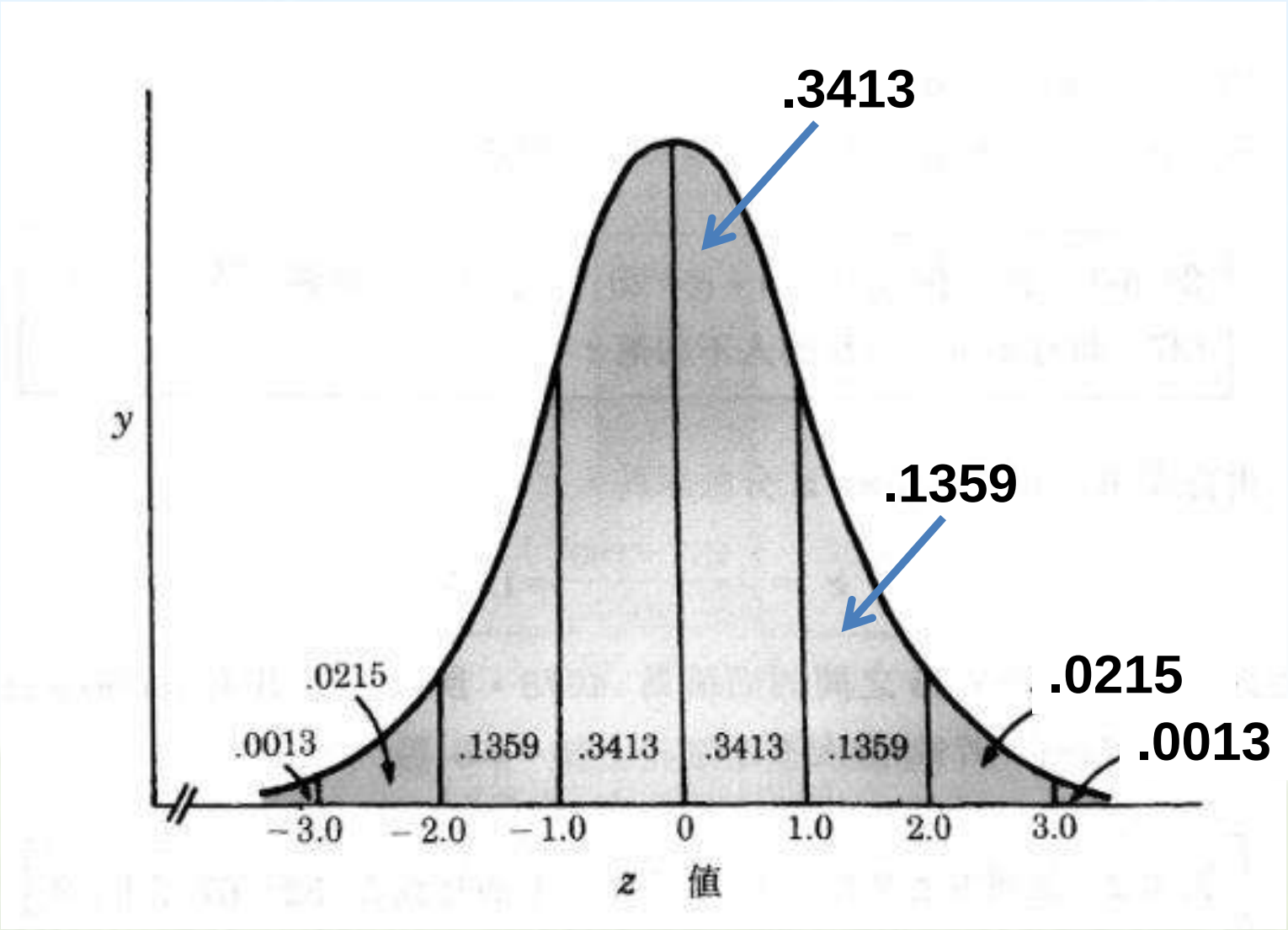
- 想像到是由無數細長方形所組成，每一長方形高為y，底邊為極小的dz。所以每一長方形的面積為ydz，而到之間所有這無數長方形之總面積便是：

$$A = \int_{z_1}^{z_2} ydz$$



z_1與z_2之間曲線下的面積

常態曲線的面積


.3413
.1359
.0215
.0013
y
.0215
.0013
.1359
.3413
.3413
.1359
−3.0
−2.0
−1.0
0
1.0
2.0
3.0
z 值

z	概　率	y	z	概　率	y	z	概　率	y
.00	.0000	.3989	.50	.1915	.3521	1.00	.3413	.2420
.01	.0040	.3989	.51	.1950	.3503	1.01	.3438	.2396
.02	.0080	.3989	.52	.1985	.3485	1.02	.3461	.2371
.03	.0120	.3988	.53	.2019	.3467	1.03	.3485	.2347
.04	.0160	.3986	.54	.2054	.3448	1.04	.3508	.2323
.05	.0199	.3984	.55	.2088	.3429	1.05	.3531	.2299
.06	.0239	.3982	.56	.2123	.3410	1.06	.3554	.2275
.07	.0279	.3980	.57	.2157	.3391	1.07	.3577	.2251
.08	.0319	.3977	.58	.2190	.3372	1.08	.3599	.2227
.09	.0359	.3973	.59	.2224	.3352	1.09	.3621	.2203
.10	.0398	.3970	.60	.2257	.3332	1.10	.3643	.2179
.11	.0438	.3965	.61	.2291	.3312	1.11	.3665	.2155
.12	.0478	.3961	.62	.2324	.3292	1.12	.3686	.2131
.13	.0517	.3856	.63	.2357	.3271	1.13	.3708	.2107
.14	.0557	.3951	.64	.2389	.3251	1.14	.3729	.2083
.15	.0596	.3945	.65	.2422	.3230	1.15	.3749	.2059
.16	.0636	.3939	.66	.2454	.3209	1.16	.3770	.2036
.17	.0675	.3932	.67	.2486	.3187	1.17	.3790	.2012
.18	.0714	.3925	.68	.2517	.3166	1.18	.3810	.1989
.19	.0753	.3918	.69	.2549	.3144	1.19	.3830	.1965

得分在$\mu \pm 1\sigma$之間者佔總人數之 .6826
得分在$\mu \pm 2\sigma$之間者佔總人數之 .9544
得分在$\mu \pm 3\sigma$之間者佔總人數之 .9974

例6-1　已知某個智力測驗的$\mu=100$，$\sigma=20$。假設某生在該智力測驗上的得分為137，則有多少百分比的人智力不如他？

Ans：

該生 z 分數＝ $\dfrac{137-100}{20}=1.85$

查表得知 z＝0 到 z＝1.87 之間的面積為.4693，再加上曲線左半部面積.05，共為.05＋.4693＝.9693，亦即在z＝1.87以下的面積為96.93%，換句話說，約有97%的人智力不如該生。

例　已知某智力測驗的$\mu=100$，$\sigma=15$。假設某位學者宣稱：「智力分數在140以上者即為資賦優異者」，則試問台灣兩千萬人口中（假設其智力亦呈常態分配），大約有多少人是屬於資賦優異？

Ans：
$$z=\frac{140-100}{15}=2.67$$

查表得知z＝0到z＝2.67之間的面積為.4962，所以大於z＝2.67以上的面積為.05－.4962＝.0038，亦即大約有0.38%的人口資賦優異。因此台灣約有20000000 × 0.38% ＝76000個人屬於資賦優異者。

例6-2 某研究者界定「比西量表」上的智商在52~67之間的兒童是為「輕度智能不足兒童」。依此定義，問在常態分配下，輕度智能不足兒童約佔多少百分比？

Ans：

比西量表的$\mu=100$，$\sigma=16$。可算出：

$$z=\frac{52-100}{16}=-3.00 \qquad z=\frac{67-100}{16}=-2.06$$

查表得知，z＝0至z＝-3.00之間的面積是.4987， z＝0至z＝-2.06之間的面積是.4803。可見z＝-3.00至z＝-2.06之間的面積應為.4987－.4803＝.0184。依這一位研究者的定義，在常態分配的情況下，輕度智能不足的兒童的百分比將約為1.84%，或大約為一萬位兒童之中可能有一百八十四位。

偏態(skewness)

偏態是指次數分配中，大多數人的分數是落在平均數的哪一邊。分數較多集中在低分，或平均數落在中位數的右邊者，是正偏態分布；分數較多集中在高分，或平均數落在中位數的左邊者，是負偏態分布。

地板與天花板效應

- 地板效應（floor effect）
  - 指數據多數集中在偏低的一端，但在高分端則有極端值，分數不容易突破低分端，但會往高分端延伸，彷彿有一個地板（或真的存在一個低分限制條件）阻擋了數據往低分移動。
  - 由於地板阻隔作用，地板效應常伴隨正偏態現象。
- 天花板效應（ceiling effect）
  - 則與負偏態有關，是指數據多數集中在偏高的一端，但在低分端則有極端值，分數不容易突破高分端，彷彿有一個天花板（或真的存在一個高分限制條件）阻擋了數據往高分移動。

通常使用g_1為偏態的指標：

$$g_1 = \frac{m_3}{m_2\sqrt{m_2}}$$

將上述公式稍加改變，就可看出g_1的另一種意義：

$$g_1 = \frac{m_3}{m_2\sqrt{m_2}} = \frac{\frac{\sum(X-\mu)^3}{N}}{\sigma^2 \times \sigma} = \frac{\sum(X-\mu)^3}{N\sigma^3} = \frac{\sum z^3}{N} = \overline{z^3}$$

可見，表示偏態的g_1事實上為z分數的三次方的算術平均數。

考驗偏態的方法以使用「動差」（moment）的方法來考驗者優點最多。

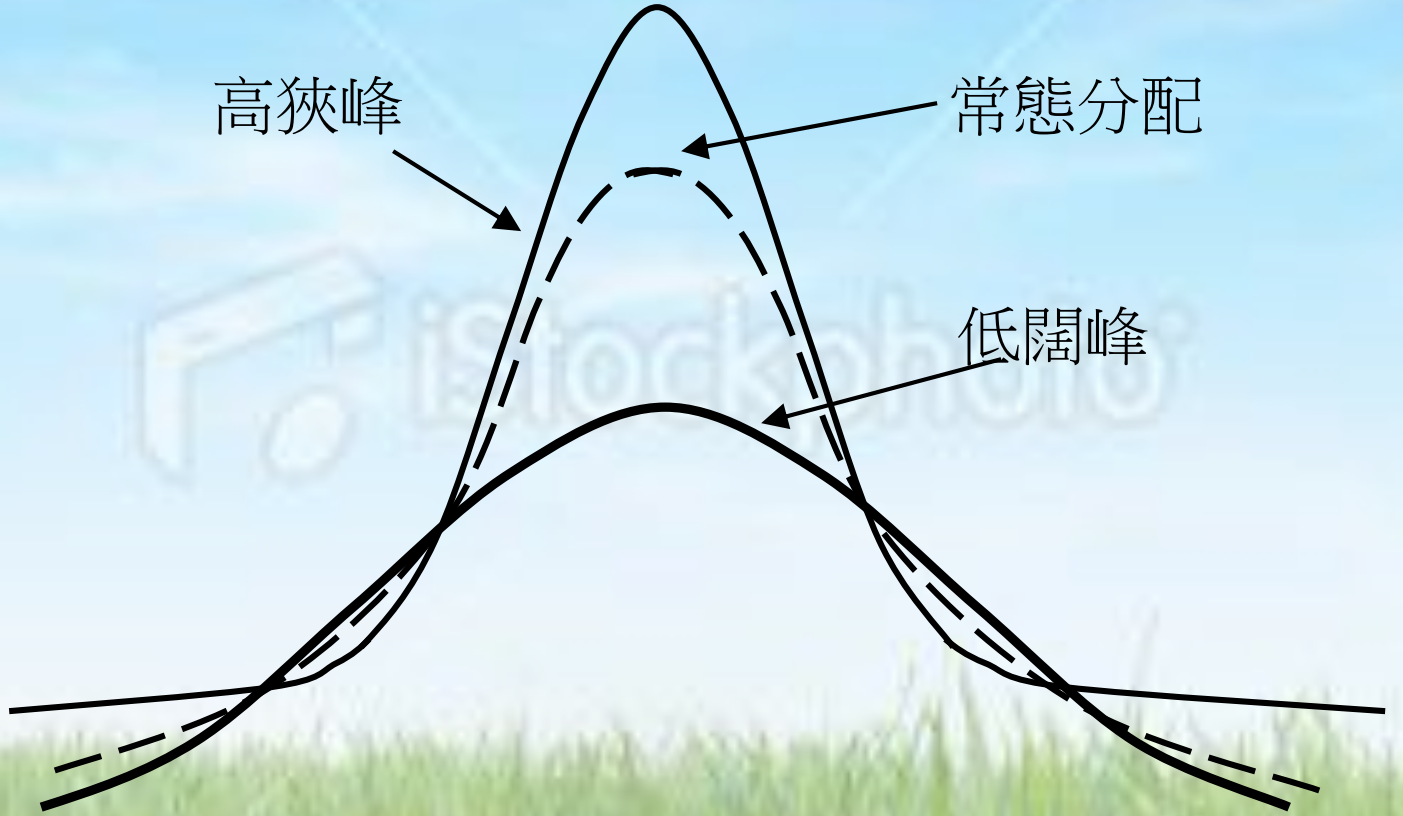
一級動差：$\frac{\sum(X-\mu)}{N}=0$

二級動差：$\frac{\sum(X-\mu)^2}{N}=\sigma^2$ → 變異數

三級動差：$\frac{\sum(X-\mu)^3}{N}$

四級動差：$\frac{\sum(X-\mu)^4}{N}$

峰度



峰度也要用動差的方法來考驗，公式為：

$$g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3$$

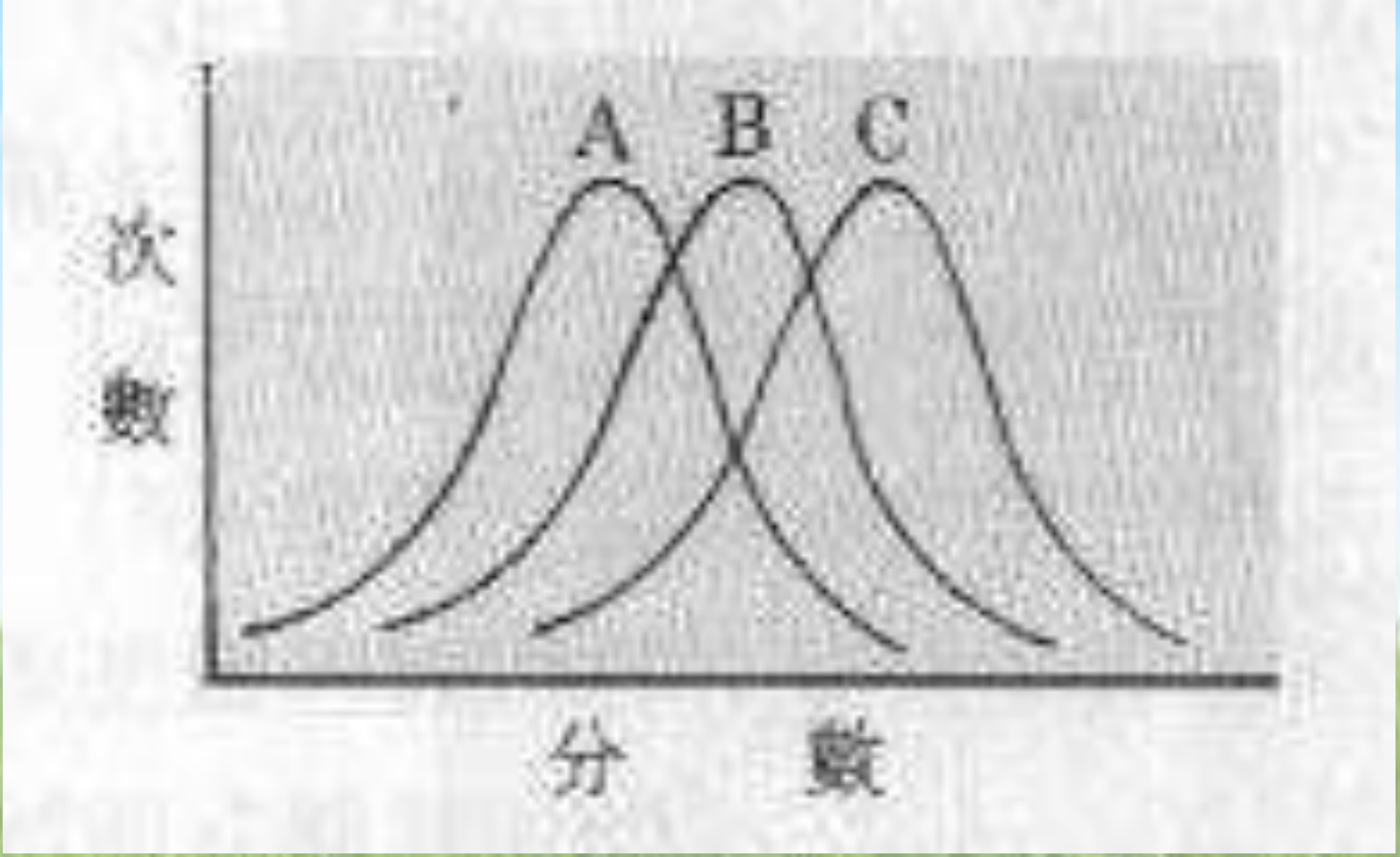
若先暫時不管上述公式的－3，就可了解g_2的另一種意義：

$$\frac{m_4}{m_2^2} = \frac{\frac{\sum\left(X-\overline{X}\right)^4}{N}}{\left(S^2\right)^2} = \frac{\sum\left(X-\overline{X}\right)^4}{NS^4} = \frac{\sum z^4}{N} = \overline{z^4}$$

可見g_2與Z分數的四次方之算數平均數有密切關係。

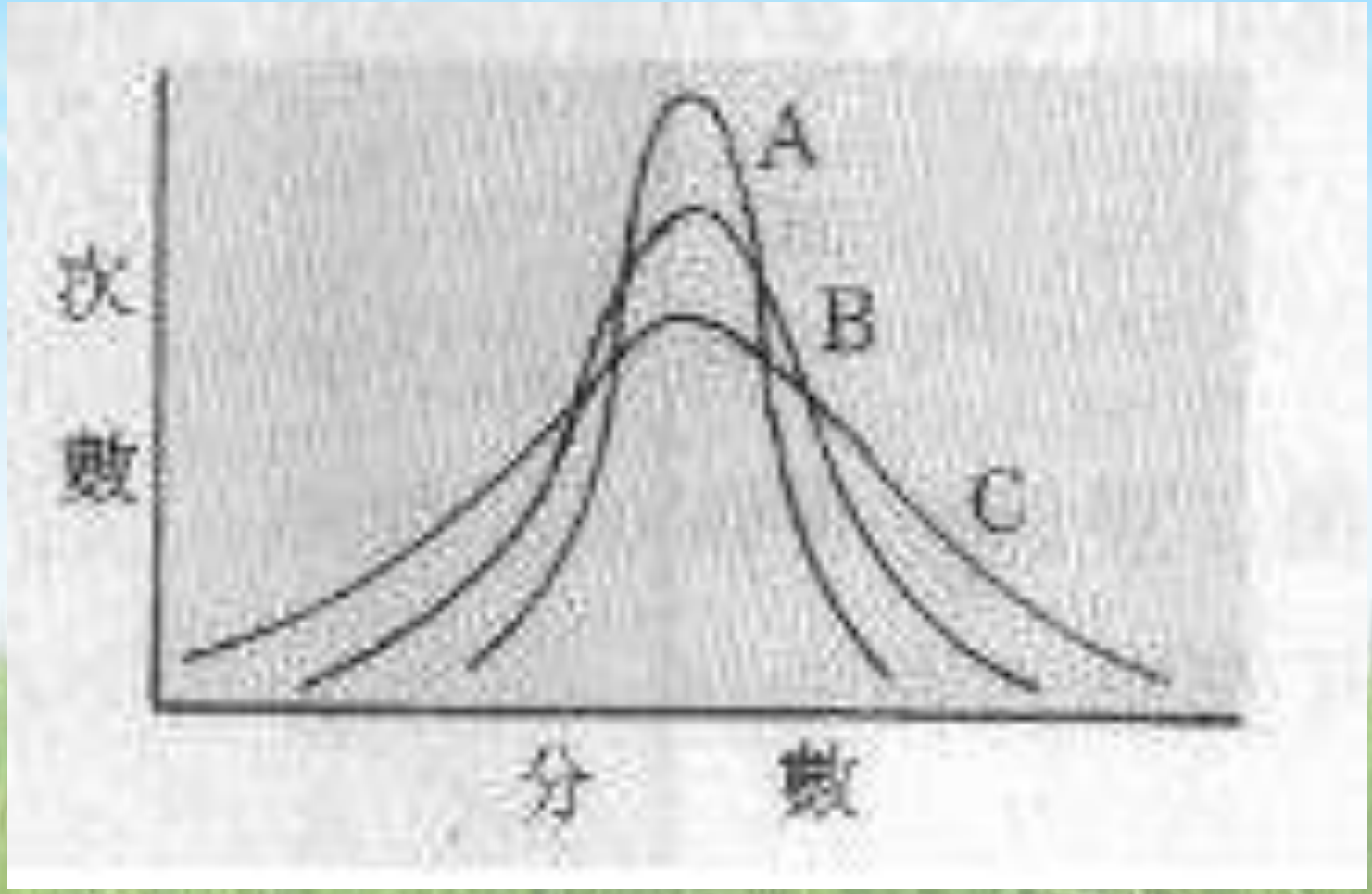
比較

集中情形不同(分散情形相同)



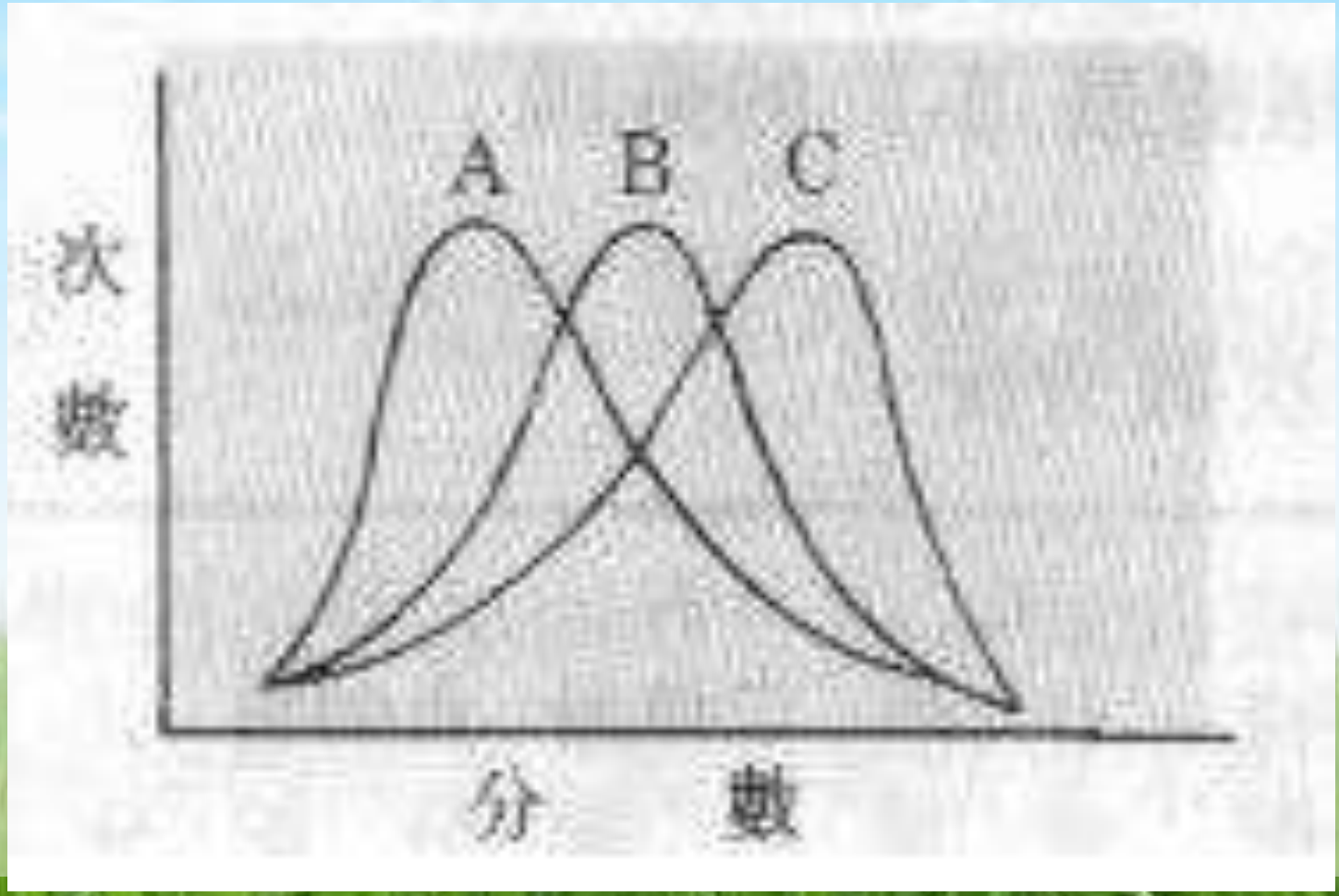
比較

分散情形不同(集中情形相同)



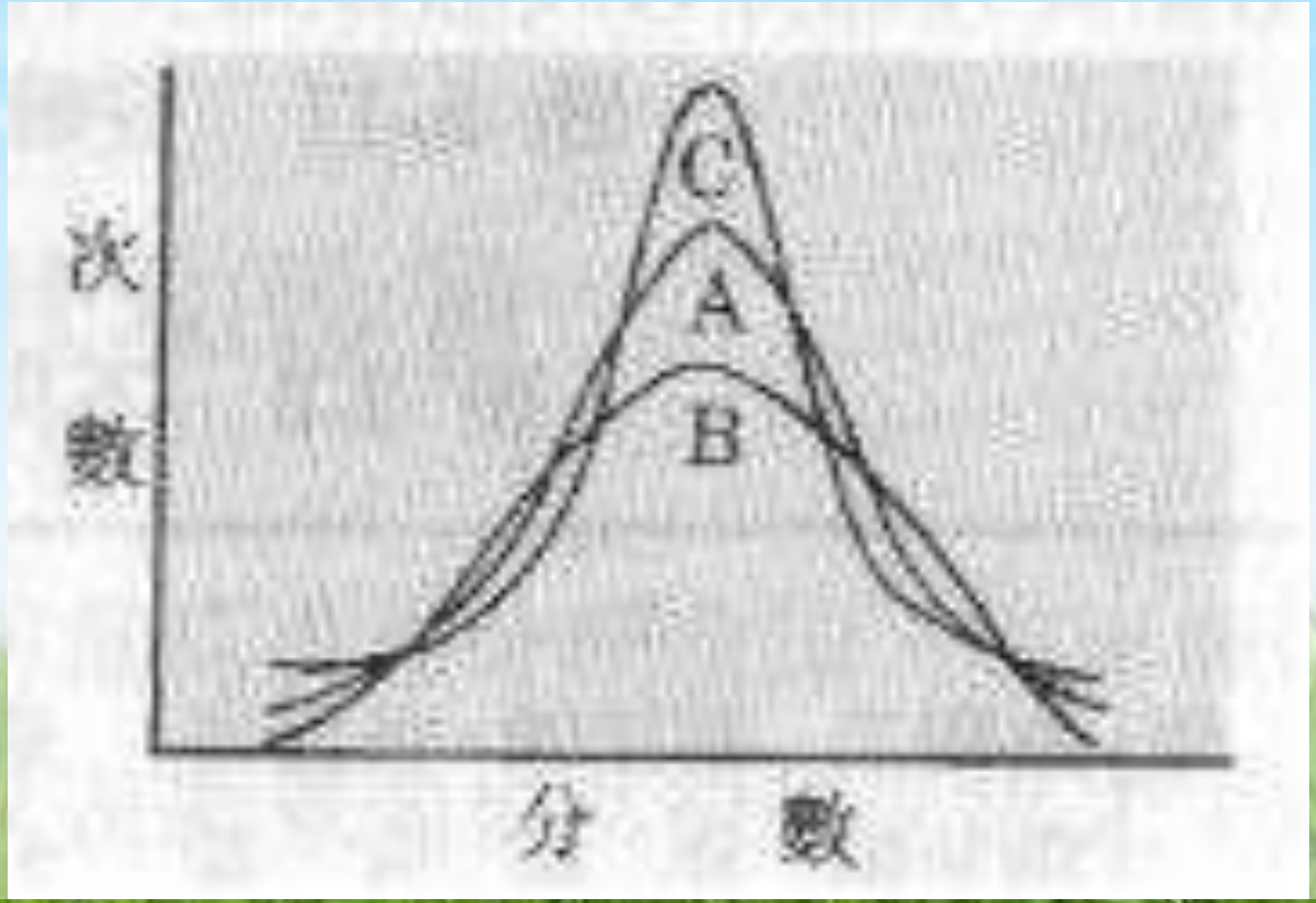
比較

偏態不同



比較

峰度不同



常態化標準分數

- 不論將原始分數化為z分數，或把z分數直線轉換為Z分數，只改變他們的平均數和標準差而已，團體中各個人分數之間的相互關係仍保持原狀不變。

T分數的定義及適用時機

T分數是一種經過常態化（normalized）的標準分數，其平均數為50，標準差為10。

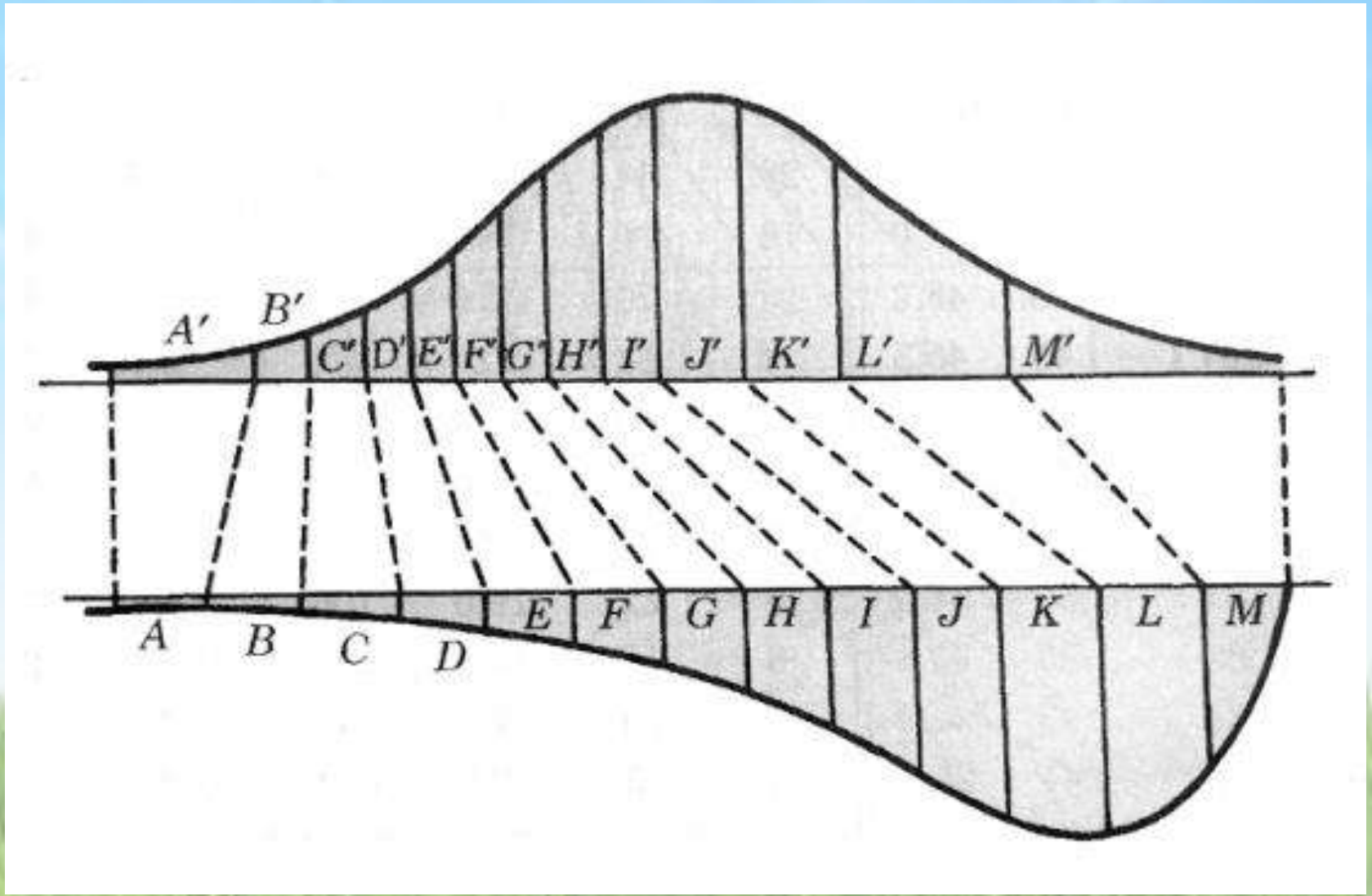
T分數的基本假定：所測量的特質之母（population）的分配是常態分配，如果特質的母群的分配不是常態，就沒有理由使用T分數。

非常態分配的資料轉換為常態分配的過程稱之為次數分配的常態化（normalization），是一種非直線轉換（nonlinear transformation）的過程。

原始分數之分配成正偏態，亦即眾數偏向左邊，經常態化之結果，原始分數低的部分之間隔便拉長。

原始分數之分配成負偏態，亦即眾數偏向右邊，經常態化之結果，原始分數高的部分之間隔便拉長。

非常態分配之常態化



常態化T分數的計算方法

例6-6　表6-7為180名國中學生的智力測驗成績。由於研究者相信在抽樣過程和測驗過程各方面均屬無誤，但卻發現這些成績有負偏態傾向，所以想把他們加以常態化，並化為T分數。試問化為T分數之步驟為何？

1. 計算至每組上限的累積次數（*cf*）。

2. 計算至每組組中點的累積次數（*cf*中點），其方法為，亦即每組次數之一半加該組下限以下的累積次數。

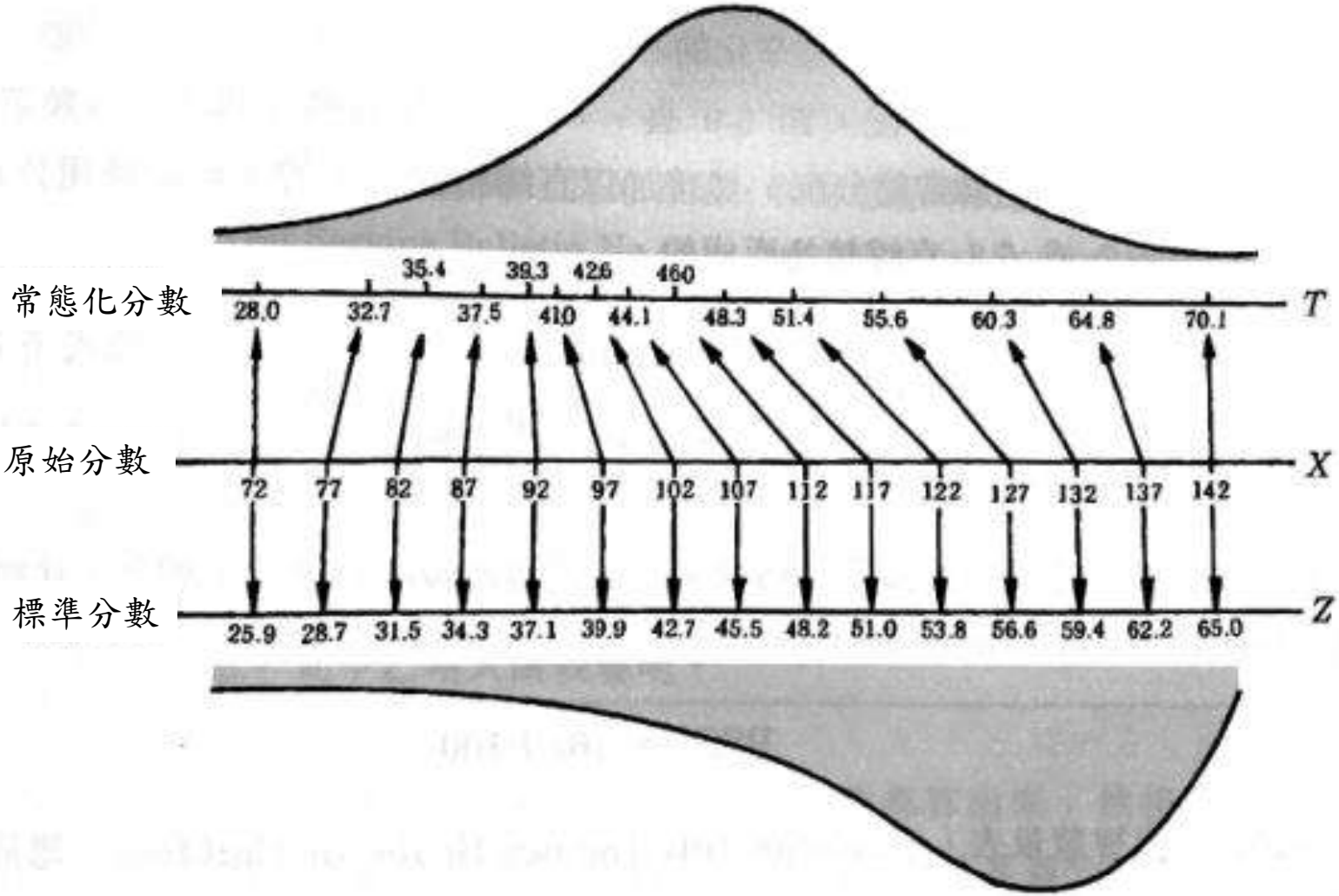
3. 將「*cf*中點」一欄之各值除以N，得至各組中點之累積百分比，是為「cp中點」一欄各值。

4. 將cp中點一欄各值是為常態分配時的概率，查附錄表A，並將各概率化為z值。這一步驟是為常態化的重要關鍵，就在此時非常態轉換為常態。因為各分數間之相互關係發生改變，其改變不成為正比例。

5. 利用下列公式將常態化後的z值再加以直線轉換，即為T分數。

$$T = 10z + 50$$

轉換後的T分數之平均數為50，標準差為10。平均數上下五個標準差，正好包括T分數0到100。


常態化分數
原始分數
標準分數
35.4 39.3 42.6 46.0
28.0 32.7 37.5 41.0 44.1 48.3 51.4 55.6 60.3 64.8 70.1
T
72 77 82 87 92 97 102 107 112 117 122 127 132 137 142
X
25.9 28.7 31.5 34.3 37.1 39.9 42.7 45.5 48.2 51.0 53.8 56.6 59.4 62.2 65.0
Z

常態標準分數之種屬

除了T分數外，還有幾種常見的常態化標準分數，他們都假設原始分數的分配呈常態分配，然後加以直線轉換。最基本的轉換通式可以表示如下：

$$Z = az + b = a\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) + b$$

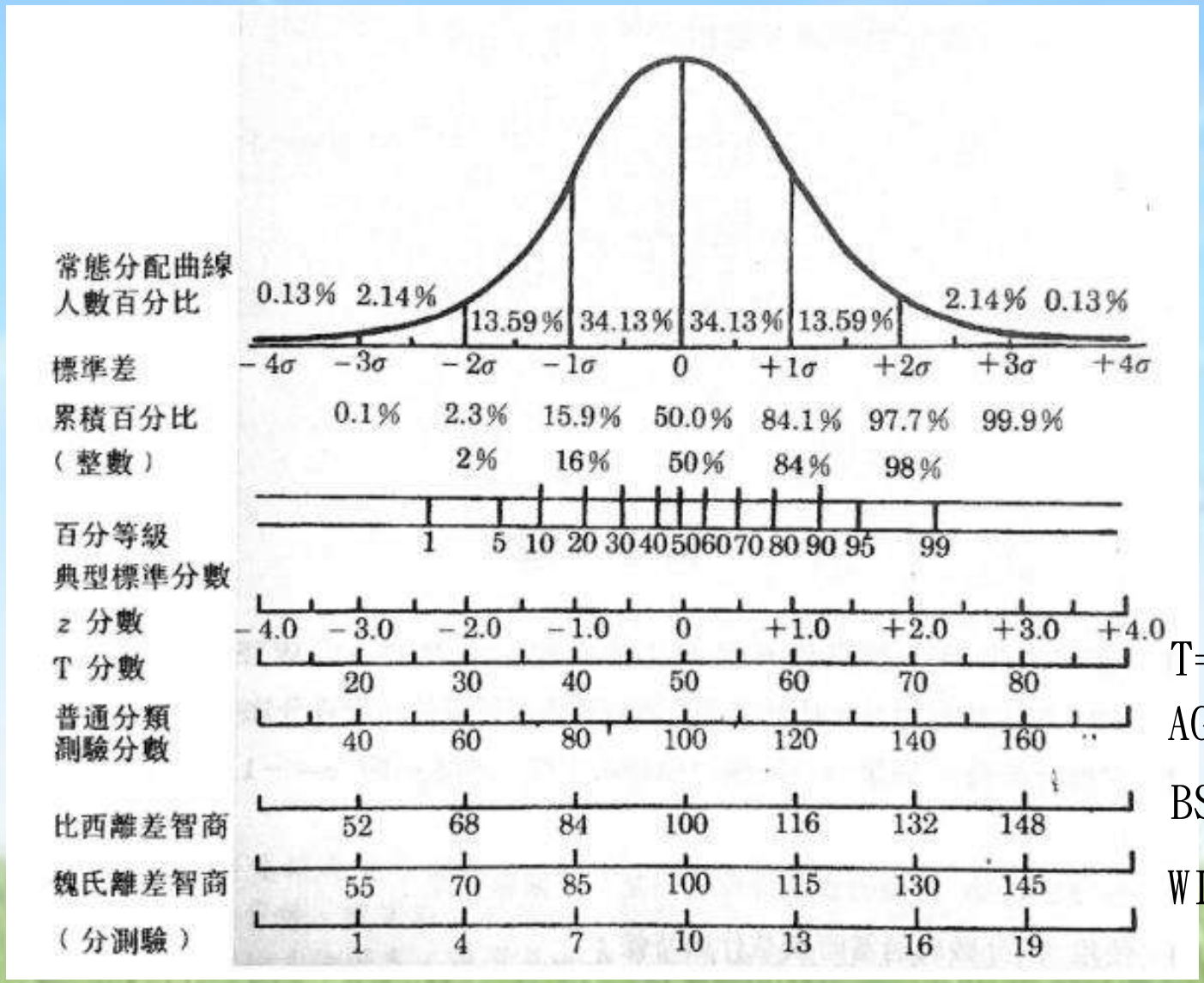
其中 b 值是轉換後的平均數，a 值是轉換後的標準差。

比西量表（Binet-Simon Scale）的分數為：

$$BSS = 16z + 100$$

魏氏兒童智力量表（Wechsler Intelligence Scale for Children）的分數為：

$$WISC = 15z + 100$$



T=10z+50

AGCT=20z+100

BSS=16z+100

WISC=15z+100

常態分配曲線、百分等級和常態標準分數

例6-7　甲生在比西量表（$\mu=100,\ \sigma=16$）上的得分為132，乙生在魏氏兒童智力量表（$\mu=100,\ \sigma=15$）上的得分亦為132，請問乙生z分數是多少？他再團體中所佔的地位如何？甲乙兩生誰比較聰明？

Ans：

乙生z分數＝ $\dfrac{132-100}{15}=2.13$

查附錄表A，得知乙生z分數為2.13時，有98.34%的人智力不如他。

甲生　$WISC=15\left(\dfrac{132-100}{16}\right)+100=130$

乙生　$WISC=132$

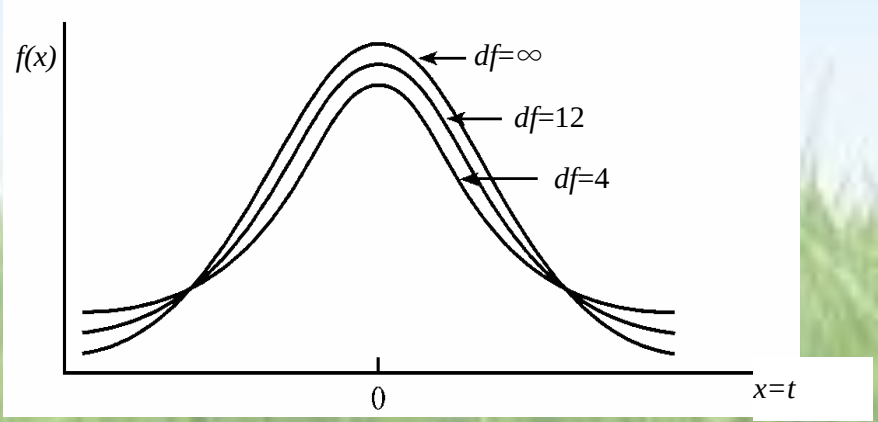
由此可知，乙生比甲生聰明。

*t*分配

- 使用時機
  - 用來發展當常態母體變異數未知的情況下，平均數 μ 的推論方法。
  - 用來發展當兩個常態母體變異數未知，且樣本皆為小樣本情況下，兩母體平均數差的推論方法。
  - 可用於變異數分析之事後檢定，以及相關分析、迴歸分析之推論 。

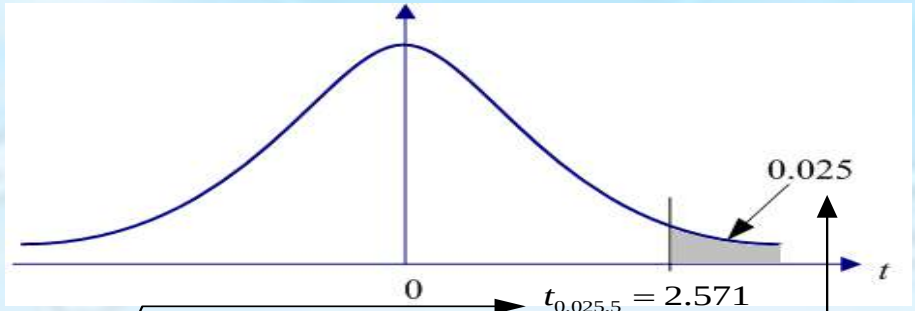
*t*分配

- *t*分配的變異數隨著自由度的變化而變動
  - 自由度越大，變異數越趨近於1，接近標準化常態分配
  - 自由度越小，變異數越大於1，也就是比標準化常態分配更趨於分散扁平



t分配查表

$$t_{0.025,5} = 2.571$$



Degrees of Freedom	Area in Upper Tail .20	.10	.05	.025	.01	.005
1	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656
2	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250

χ^2分配

- 主要用於類別資料(categorical dada)的檢定
- 適用於三種檢定

▶適合性檢定（Test of goodness of fit）

單一變數類別資料分析：例如消費者對不同口味飲料之喜好無顯著差異。

▶獨立性檢定（Test of independence）

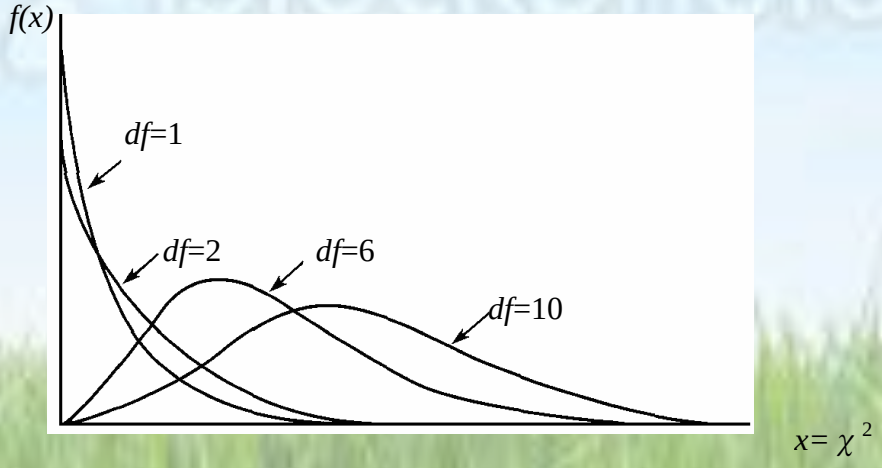
離散型變數之相關性：例如男生與女生滿意度無顯著差異。

▶同質性檢定（homogeneous test）

兩變數類別資料分析：例如甲乙丙丁四個單位員工滿意度無顯著差異。

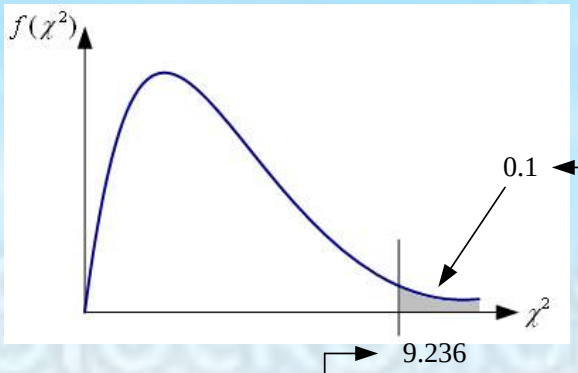
χ^2分配

- 在不同的自由度下，卡方分配的形狀有所不同
  - 當自由度小時，分佈呈現正偏態不對稱分佈
  - 當自由度越大，分佈逐漸形成常態分佈



χ^2分配查表

$$\chi^2_{0.1,5} = 9.236$$



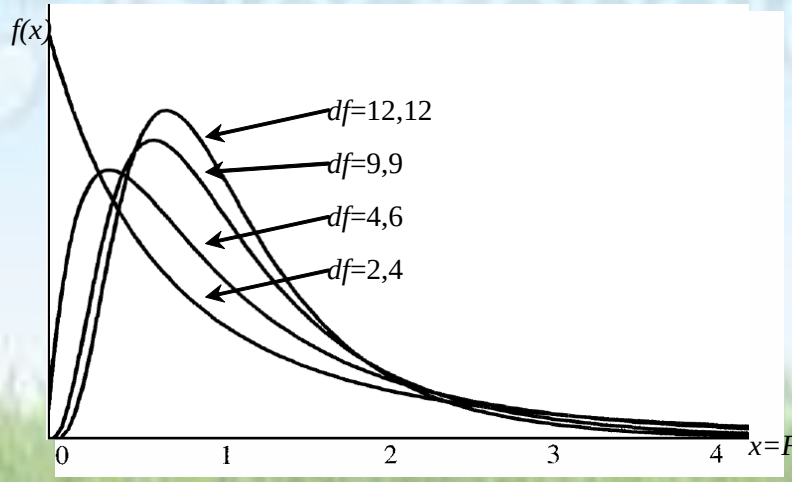
Degrees of Freedom	Area in Upper Tail									
	.995	.99	.975	.95	.90	.10	.05	.025	.01	.005
1	.000	.000	.001	.004	.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	.010	.020	.051	.103	.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	.072	.115	.216	.352	.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	.207	.297	.484	.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	.412	.554	.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750
6	.676	.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188

*F*分配

- 使用時機
  - ▶變異數分析
  - ▶迴歸分析中之檢定
  - ▶檢定兩個常態母體變異數是否相等

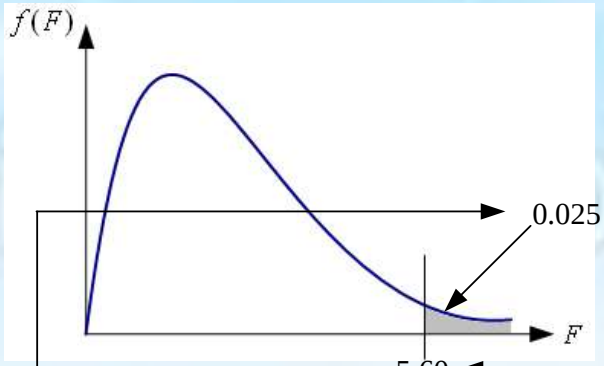
F分配

- F量數是由自由度為v1與v2的兩個卡方變數之比值，以F（v1, v2）表示，當自由度小時，F分配呈現正偏態，自由度越大，越接近常態分配



*F*分配查表

$$F_{0.025,8,6} = 5.60$$



分母自由度

分子自由度

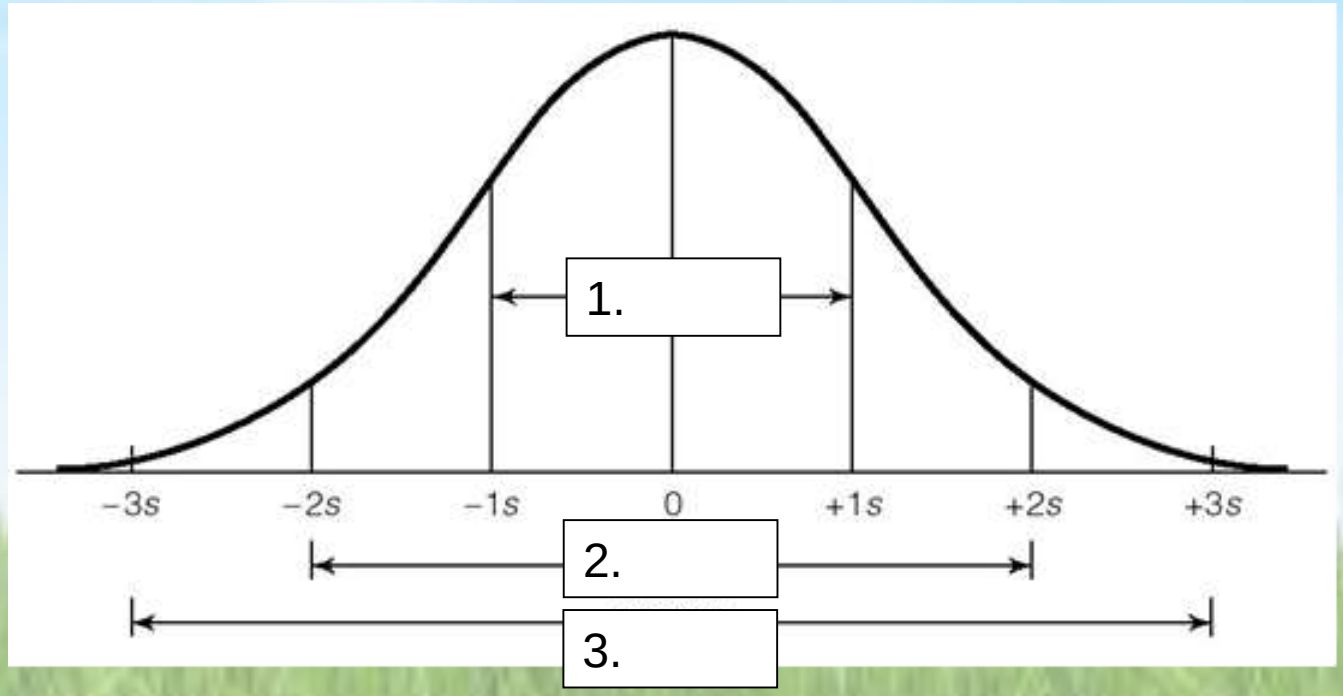
Denominator Degrees of Freedom	Area in Upper Tail	Numerator Degrees of Freedom 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25
6	.10	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.87	2.84	2.81
	.05	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	3.94	3.87	3.83
	.025	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.27	5.17	5.11
	.01	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.56	7.40	7.30
7	.10	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.63	2.59	2.57
	.05	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.51	3.44	3.40
	.025	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.57	4.47	4.40
	.01	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.31	6.16	6.06

四大分配的關係

- Z、$\chi 2$、F與t是推論統計的四大基本分配
- Z分配（也就是標準常態分配）是各分配之母
- 在t統計量的公式中，母體標準差在推導中被抵銷，表示t統計量的計算，可以在母體標準差未知的情條件下進行運算

例題示範

- 請根據下表的常態分配圖，寫出各標準差間所佔的面積比例。



例題示範

- 求出下列條件在常態曲線下的面積：

(1)－.83$_Z$ ~ 1.06$_Z$　　(2)－.24$_Z$ ~ －.61$_Z$

(3) 1.34$_Z$ ~ 2.56$_Z$

- 據常態分配曲線的面積指出現下列百分位數的z分數：

(1)P_8　　(2) P_{38}　　(3) P_{85}

- 試根據常態分配曲線的面積指出下列z分數的百分等級：

(1)z=－2.44　　(2) z=－.66

(3) z= 1.11　　(4) z= 2.33

例題示範

- 當下列分數呈常態分配時，何者得分的相對位置最高？

（1）T 分數 62（2）z 分數 1.5（3）百分等級 85（4）比西量表智商 130

- 在一份測驗上，下列何者的表現最差？請說明理由。

（甲） P_{10}　　（乙） z＝-1.5　　（丙）T＝30

- 甲生在某種平均分數為66.45，標準差12.36的普通能力測驗上得分86分，如果轉換成AGCT分數應該是多少？

例題示範

- 某班學生的智育成績如下，試求（1）得91分者的 z分數，說明此z分數的意義；（2）得67分者的百分等級。

  58、62、66、67、72、73、79、81、82、85、87、

  91、92、94、96、97

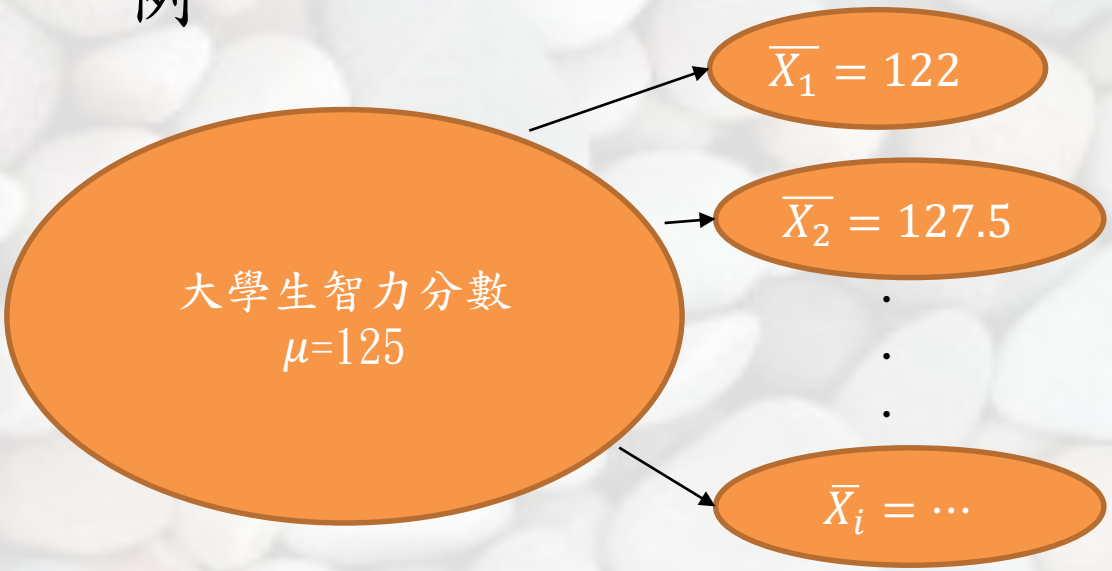
- 某班40名學生接受兩次測驗，其結果：英文測驗的平均數為69分，標準差為5.5分；數學測驗的平均數為51分，標準差為6.2分請回答下列問題：

1. 大仁在英文測驗和數學測驗上都得到58分，請問他哪一科考得比較好，為什麼？
2. 若將大仁的英文和數學之z分數再轉換為W分數（平均數為110，標準差為15），則大仁的英文和數學之W分數各是多少？

第　章 抽樣分配

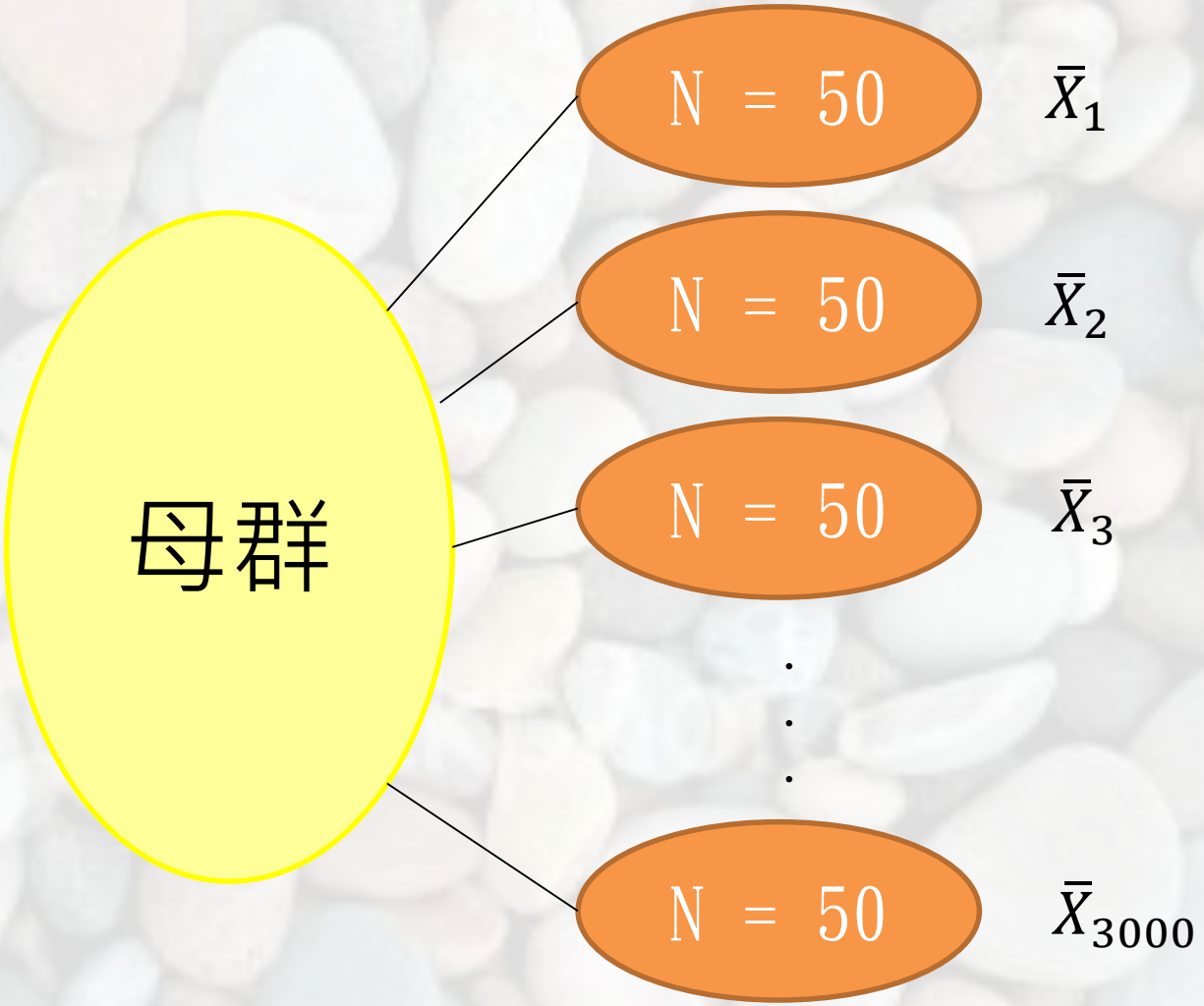
抽樣分配
（sampling distributions）

- 例



- 樣本統計量的機率分配
- 主要功能是在推估母體參數

母群性質
已知，
即σ^2已知



此$\bar{X}_1 \sim \bar{X}_{3000}$所形成的分配會非常接近常態分配

- 樣本平均數分配的平均數

$$\overline{\overline{X}} = \mu$$

- 樣本平均數分配的**變異誤**

$$\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{N}$$

- 樣本平均數分配的**標準誤**

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}$$

樣本平均數的次數分配(圖)

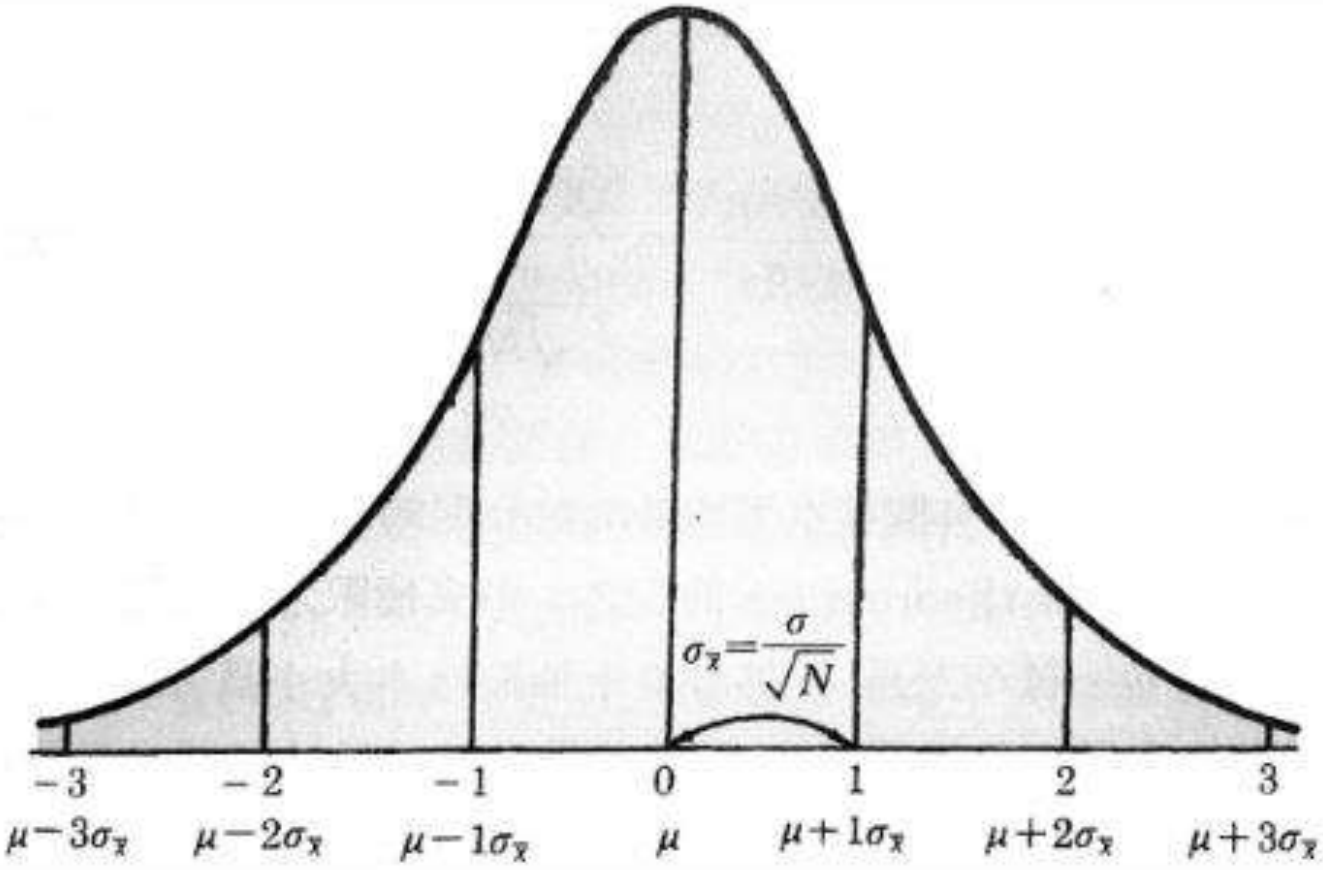


圖 10-1　樣本平均數的次數分配（無限多個樣本平均數的次數分配會成爲常態分配，其平均數爲 μ，標準誤爲 $\sigma_{\bar{x}}$）

圖10-1表示有許許多多樣本平均數所構成的次數分配已幾乎完全接近常態分配。此常態分配的基本構成分子是$\overline{X_i}$，其分散情形的量數是$\sigma_{\overline{X}}$，叫標準誤，不叫標準差。樣本平均數的分散情形（$\sigma_{\overline{X}}$）顯然比母群的分散情形（σ）小的很多，雖然如此，常態分配的特質均可適用於它。

標準誤差(sampling error)

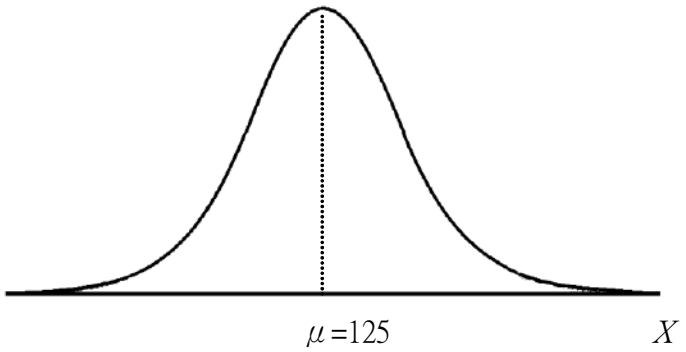
- 抽樣分配中的樣本統計量呈現波動狀態（因有抽樣誤差）
- 抽樣分配的標準差反應抽樣誤差的大小稱為標準誤（standard error of the sample mean），變異數為變異誤（squared standard error of the sample mean）
- 當標準誤或變異誤越大，表示抽樣的誤差越大，標準誤或變異誤越小，表示抽樣的誤差越小

在這些樣本平均數的分配之中：

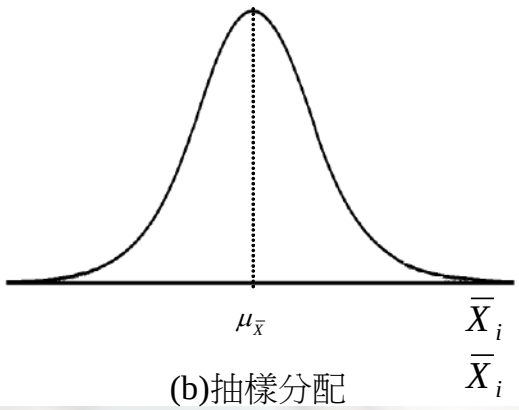
* $\overline{X}$ 值在 $\mu \pm 1\sigma_{\overline{X}}$ 之間者佔總人數之 .6826
* $\overline{X}$ 值在 $\mu \pm 2\sigma_{\overline{X}}$ 之間者佔總人數之 .9544
* $\overline{X}$ 值在 $\mu \pm 3\sigma_{\overline{X}}$ 之間者佔總人數之 .9974

對照母群的分配：

得分在 $\mu \pm 1\sigma$ 之間者佔總人數之 .6826
得分在 $\mu \pm 2\sigma$ 之間者佔總人數之 .9544
得分在 $\mu \pm 3\sigma$ 之間者佔總人數之 .9974



(a)母體分配



(b)抽樣分配

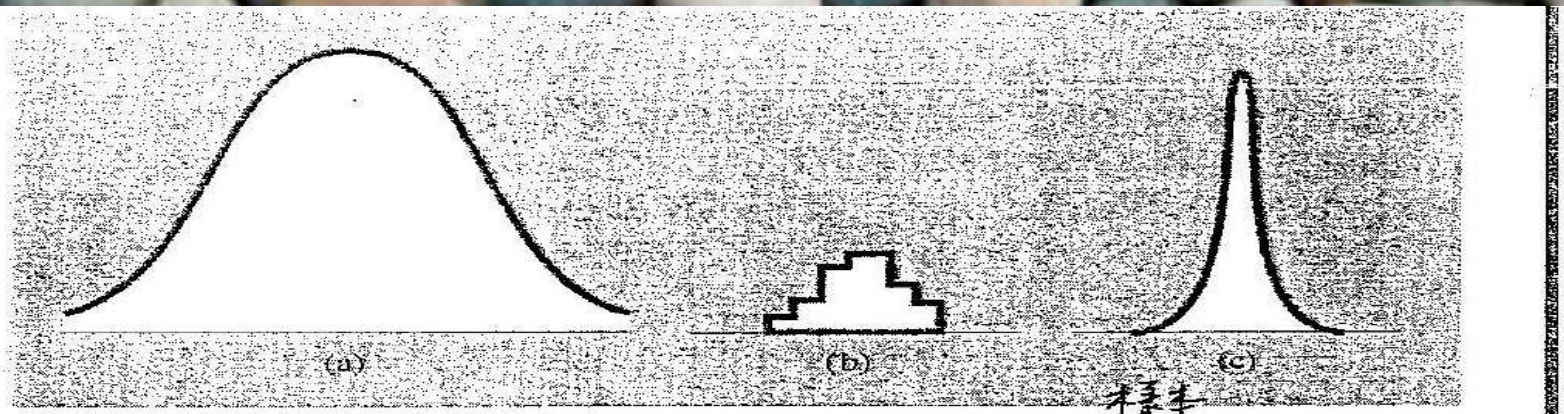
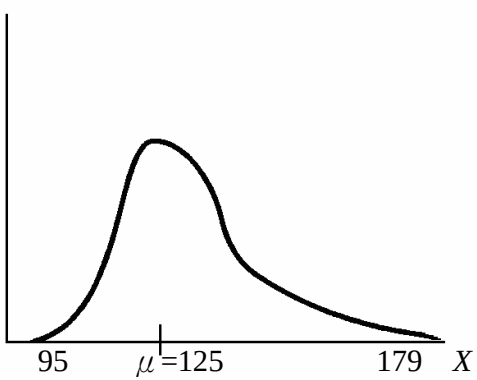


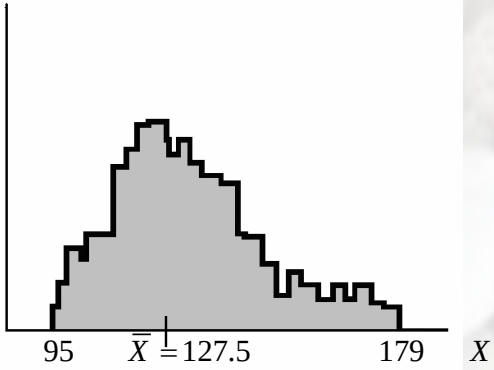
圖 7-5 (a) 母群中個別分數的分配。(b) 某一樣本的分配。(c) 平均數的分配。

表 三種分配的異同

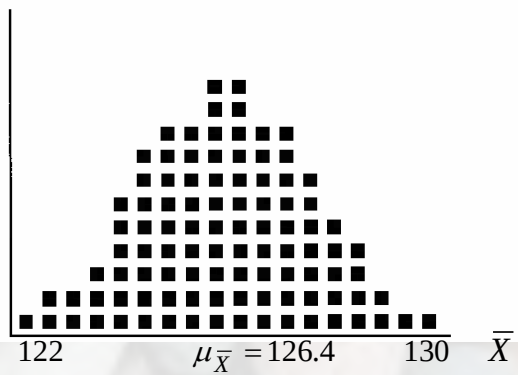
	母群的分配	某一樣本的分配	平均數的分配
內容	所有個人的分數	某一樣本中的個人分數	從母群中抽取許多隨機樣本，這些樣本的平均數
形態	可以是任何形態，通常是常態的	可以是任何形態	當母群的分配接近常態時，則呈常態分配；若樣本的人數大於或等於30，則很接近常態分配。
平均數	μ	$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$	$\mu_{\bar{X}} = \mu$
變異數	σ^2	$S^2 = \frac{\sum (X - \mu)^2}{N}$	$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{N}$
標準差	σ	$S = \sqrt{S^2}$	$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\sigma_{\mu}^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$



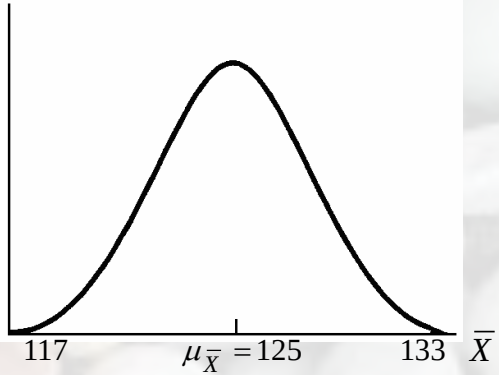
(a)母體分配
(全體的次數分配)



(b)樣本分配
(一個 n=200 的樣本)



(c)抽樣分配
（100 個 n=200 的樣本）



(d)抽樣分配
（無限多個 n=200 的樣本）

中央極限定理

如果我們重複的從平均數μ，標準差為σ的母群中抽取樣本大小為N的許許多多樣本，得到許許多多樣本平均數$\overline{X_i}$，則不管原來母群的各分數之次數分配形狀如何，這些樣本平均數將成為常態分配。而且這些樣本平均數的平均數將等於μ，這些樣本平均數之標準差（特稱為標準誤）$\sigma_{\bar{X}}$將等於$\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$。

中央極限定理

上這樣寫：

於任何一個母體（μ，σ^2），樣本大小為n的樣本平均數所形
的分配，當樣本大小n趨近無限大時，亦趨近於常態分配（
σ^2/n）。

基這樣寫：

央極限定理是機率論中的一組定理。中央極限定理說明：大
互相獨立的隨機變數，其均值的分佈以常態分佈為極限。這
定理是數理統計學和誤差分析的理論基礎，指出了大量隨機
數之和近似服從常態分佈的條件。

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

樣本平均數的標準誤之大小與樣本大小的平方根成反比，取樣人數N愈大，則樣本平均數的標準誤會愈小。

樣本人數愈大，所得到的這許許多多樣本平均數愈相似，而且愈趨近母群平均數，這就是「大數原則」(law of large numbers)

大數法則
(Law of Large Numbers)

- 拋硬幣實驗
- 在拋投次數夠大的情況下，硬幣出現正反面的機率會非常接近1/2，在嚴格的終極情況下，理想機率與拋投機率會相當，藉此降低「隨機性」的困擾。

補充資料

- 兩個骰子-大數法則與常態分配 https://scratch.mit.edu/projects/279074418/

第十章

推論統計的基本概念

前言

- 母群：是可根據某些原則來加以認定的全部觀察量數之總集合
- 樣本：是由母群觀察量數抽樣而來的部分集合

- 統計決策
  - 樣本統計量→母體參數
- 統計分配（statistical distribution）
  - 基於統計的機率原理所形成的分配
- 母體分配（population distributions）
  - 隨機變數所有可能觀察值所形成的機率分配

- 母數，代表母群之性質的量數。統計數，描述樣本性質的量數。估計數是用來推估母數的量數。
  例如：

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum\left(X-\overline{X}\right)^2}{N}}$ 是母數，$S_X = \sqrt{\frac{\sum\left(X-\overline{X}\right)^2}{N}}$ 是統計數，

$s = \sqrt{\frac{\sum\left(X-\overline{X}\right)^2}{N-1}}$ 是推估 σ 的估計數。

母數、統計數和估計數

	統計數	母數
平均數	$\overline{X}$	μ
變異數	S^2	σ^2
標準差	S	σ
相關係數	r	ρ

隨機抽樣

樣本既然是要用來代表母群的，則樣本必須具有代表性 。

隨機抽樣必須符合兩個條件：

- 均等的概率：母群內的每一個體均有相同的概率可以被抽取為樣本 。
- 獨立的概率：母群內的某一個體被抽為樣本時，並不影響到其他個體被抽為樣本的概率 。

抽樣的方式

常用的抽樣方法有下列幾種：

1. 簡單隨機抽樣
2. 系統性抽樣
3. 分層隨機抽樣
4. 叢集抽樣

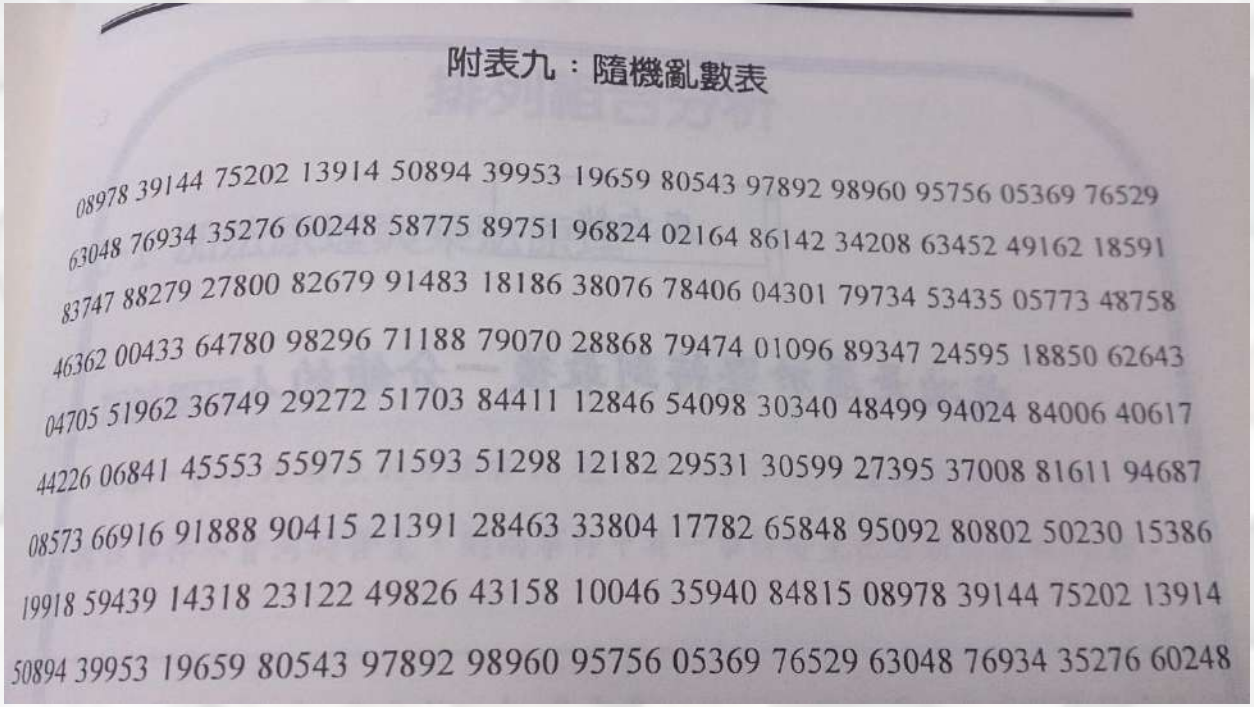
簡單隨機抽樣1

隨機抽樣最簡便而正確的方法是利用亂數表。因為以個人為抽樣單位，不是以班級或團體為抽樣單位，當一人被抽取時並不影響他人被抽取的機率，故合乎獨立概率的條件。由此可見，以隨機抽樣方式抽取樣本，可以避免有系統的偏誤（systematic bias）。

簡單隨機抽樣2

- 簡單隨機抽樣必須符合兩個條件：
  - §均等的概率：母群內的每一個體均有相同的概率可以被抽取為樣本 。
  - §獨立的概率：母群內的某一個體被抽為樣本時，並不影響到其他個體被抽為樣本的概率 。

簡單隨機抽樣



附表九：隨機亂數表

08978 39144 75202 13914 50894 39953 19659 80543 97892 98960 95756 05369 76529
63048 76934 35276 60248 58775 89751 96824 02164 86142 34208 63452 49162 18591
83747 88279 27800 82679 91483 18186 38076 78406 04301 79734 53435 05773 48758
46362 00433 64780 98296 71188 79070 28868 79474 01096 89347 24595 18850 62643
04705 51962 36749 29272 51703 84411 12846 54098 30340 48499 94024 84006 40617
44226 06841 45553 55975 71593 51298 12182 29531 30599 27395 37008 81611 94687
08573 66916 91888 90415 21391 28463 33804 17782 65848 95092 80802 50230 15386
19918 59439 14318 23122 49826 43158 10046 35940 84815 08978 39144 75202 13914
50894 39953 19659 80543 97892 98960 95756 05369 76529 63048 76934 35276 60248

- 利用亂數表來建立樣本
- 每個個體被抽中的機率相同
- 每個個體被抽中的可能性相互獨立

系統性抽樣

抽樣時所用的母群名單是按照字母順序，或其他系統性順序排列，便稱為「系統性抽樣」，系統性抽樣比簡單隨機抽樣容易得到錯誤的估計。

分層隨機抽樣

假使抽樣之前研究者知道母群內各「層次」成員的比例（例如根據戶口普查的資料），而按照這比例自每一層次中隨機抽取樣本，就是「分層隨機抽樣」。抽樣之前研究者必須明確指出層次的界線，其原則為層次與層次之間的變異盡量大，但層次本身之內的變異要盡量小。通常分層隨機抽樣的抽樣誤差要比簡單隨機抽樣的抽樣誤差為小。

叢集抽樣

若抽樣單位是一群元素所構成的「集合」，而不是各元素，即為「叢集抽樣」。例如自某市十個學校中隨機抽取兩個學校，抽樣單位是「學校」，不是以個人為抽樣單位，所以並不是母群內所有元素都有均等概率被選為樣本。

樣本平均數的次數分配

假定自一母群中，一個接一個，抽取樣本人數為N的許多個樣本，每抽取一個樣本就可以得一個平均數（$\overline{X}$）。如果此抽樣的步驟重複幾千次，便可以得到幾千個平均數。在N足夠大的時候，這些平均數的次數分配會非常接近常態分配。

這些由好幾個平均數所構成的次數分配之平均數，亦即樣本平均數的平均數，將正好是母群的平均數μ，而此一次數分配的變異數將正好是$\frac{\sigma^2}{N}$，它是樣本平均數的變異誤；此一分配的標準差$\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$，將正好是，它是這些樣本平均數的標準誤。

點估計

只用一個特定的值，亦即數線上的一個點，作為估計值以估計母數時，就叫做「點估計」。

＊進行點估計時，估計數應具備三個條件：不偏性、一致性、有效性

1. 不偏性：例如$\overline{X}$是母群平均數μ的不偏估計數；要估計母群變異數σ^2，一定要用它的不偏估計數

$$s^2 = \frac{\sum\left(X - \overline{X}\right)^2}{N-1}$$

2. 一致性：一個具有一致性的估計數，有時也會有所偏，但是當樣本總數越來越增加時，它的值常是越來越接近它所要估計的母數。

3. 有效性：用一個有效的估計數來估計母數時，通常要比用一個無效的估計數為正確；換言之，它的值不因為樣本不同而變異太厲害。

區間估計

在區間估計時，我們並不估計一個點，而是估計數線上的一個線段，並且說母數的值可能落在這一個線段之間，同時還要說μ落在這線段間的概率有多大。

利用附錄表A，則可求出：

$\bar{X}$值在$\mu \pm 1.96\sigma_{\bar{X}}$之間者佔95%

$\bar{X}$值在$\mu \pm 2.58\sigma_{\bar{X}}$ 之間者佔99%

則可推理：

如果有95%的$\bar{X}$落在μ的上下1.96個標準誤，那麼在任何一個$\bar{X}$上面減去1.96及加上1.96，得一個自（ $\bar{X}-1.96\sigma_{\bar{X}}$ ）至（ $\bar{X}+1.96\sigma_{\bar{X}}$ ）的區間（線段），則將有95%的機會包括μ在此一區間之內。

$\bar{X}$ 上下$1.96\sigma_{\bar{X}}$的信賴區間內包括μ在內的概率為.95，不包括μ在內的概率為.05。

通式：

$$\bar{X}-z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq\mu\leq\bar{X}+z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

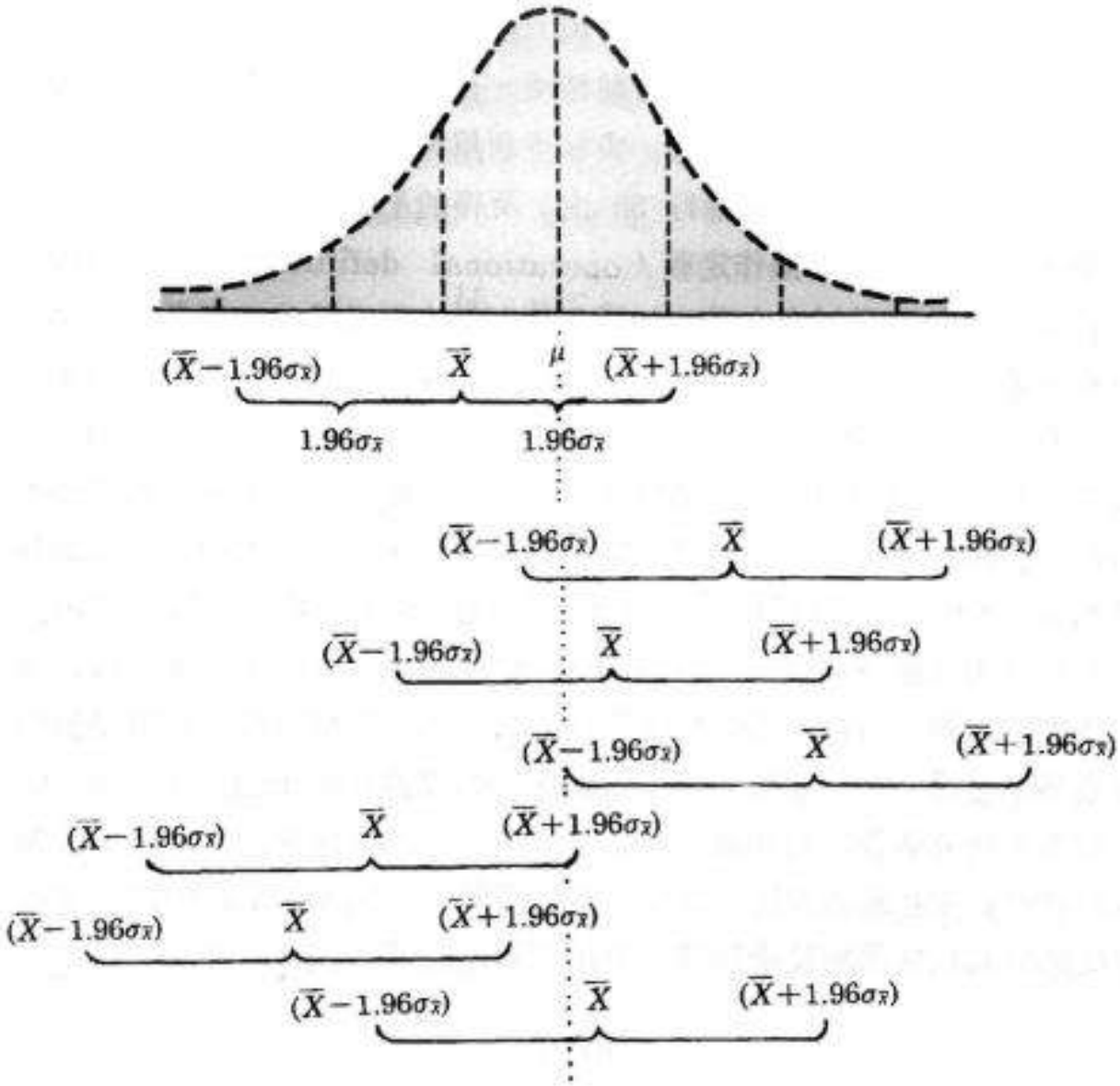


圖 10-2 $\bar{X}$ 上下 $1.96\sigma_{\bar{X}}$ 的信賴區間內包括 μ 在內的概率爲 .95，不包括 μ 在內的概率爲 .05。

研究假設&統計假設

- 研究假設：常是研究者根據他的觀察和理論對該一問題所做的邏輯的猜測，並以陳述句的方式表示出來。例如：「選擇反應時間要長於簡單反應時間」。
- 統計假設：把研究假設用數量或統計學用詞的方式來表達，並對未知的母數性質作有關的陳述，如：$\mu_1 > \mu_2$。包含：
  ＊虛無假設（H_0）
  ＊對立假設（H_1）

虛無假設&對立假設

- 對立假設：把研究假設「選擇反應時間長於簡單反應時間」翻譯過來、而且不含等號「＝」在內的統計假設就是「對立假設」，寫成： H_1：$\mu_1 > \mu_2$
- 虛無假設：在統計學上，研究者並不直接去考驗對立假設的真偽對錯，而是先提出一個與對立假設完全相反的假設（即虛無假設），並故意來否定它的真實性。此故意否定對立假設、且含有「＝」在內的統計假設，就是「虛無假設」，寫成： H_0：$\mu_1 \leqq \mu_2$

單側考驗&雙側考驗

- 單側考驗：考驗單一方向性的問題。α集中於一區，α所佔的區域為臨界區或拒絕區。
- 雙側考驗：不強調方向，只強調差異的假設考驗。分為兩個區域，左右端各一個。較難達顯著水準，即較不容易拒絕H_o。

$H_1: \mu_1 > \mu_2$

$H_1: \mu_1 < \mu_2$

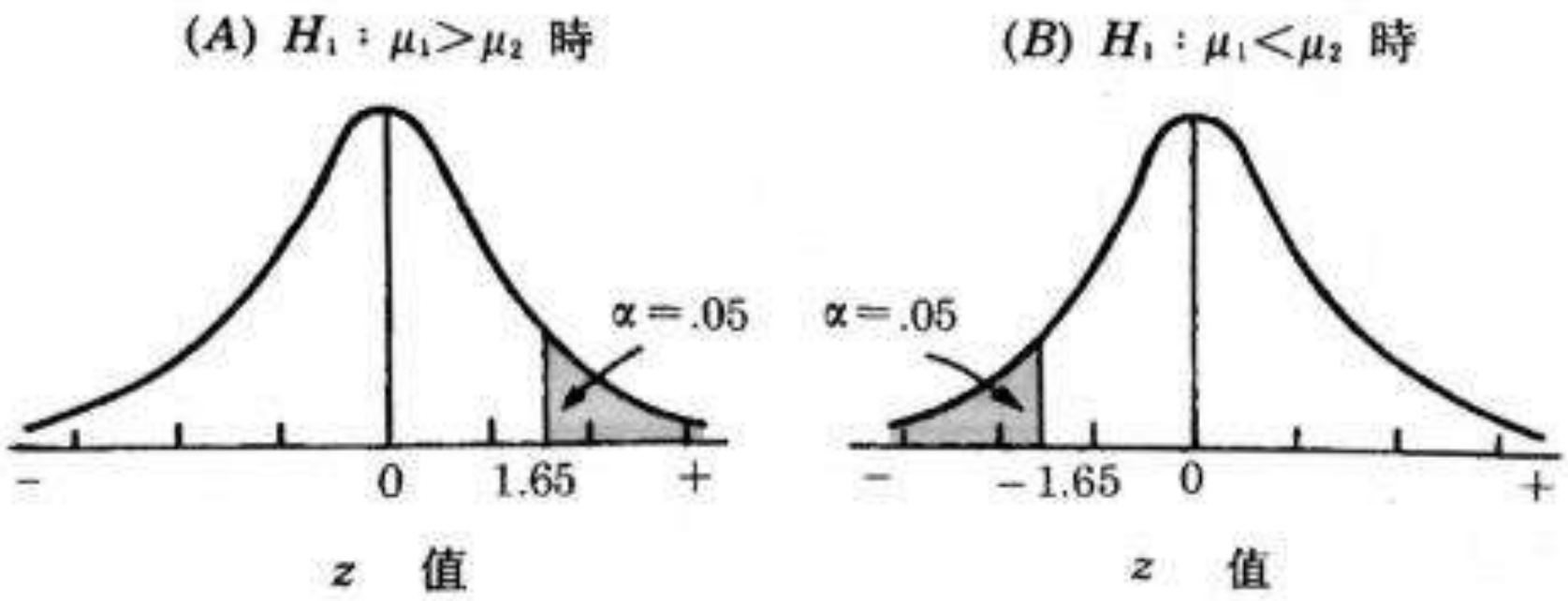


圖 10-3 單側考驗 z 分配時的拒絕區

$H_0 : \mu_2 = \mu$

$H_1 : \mu_2 \neq \mu$

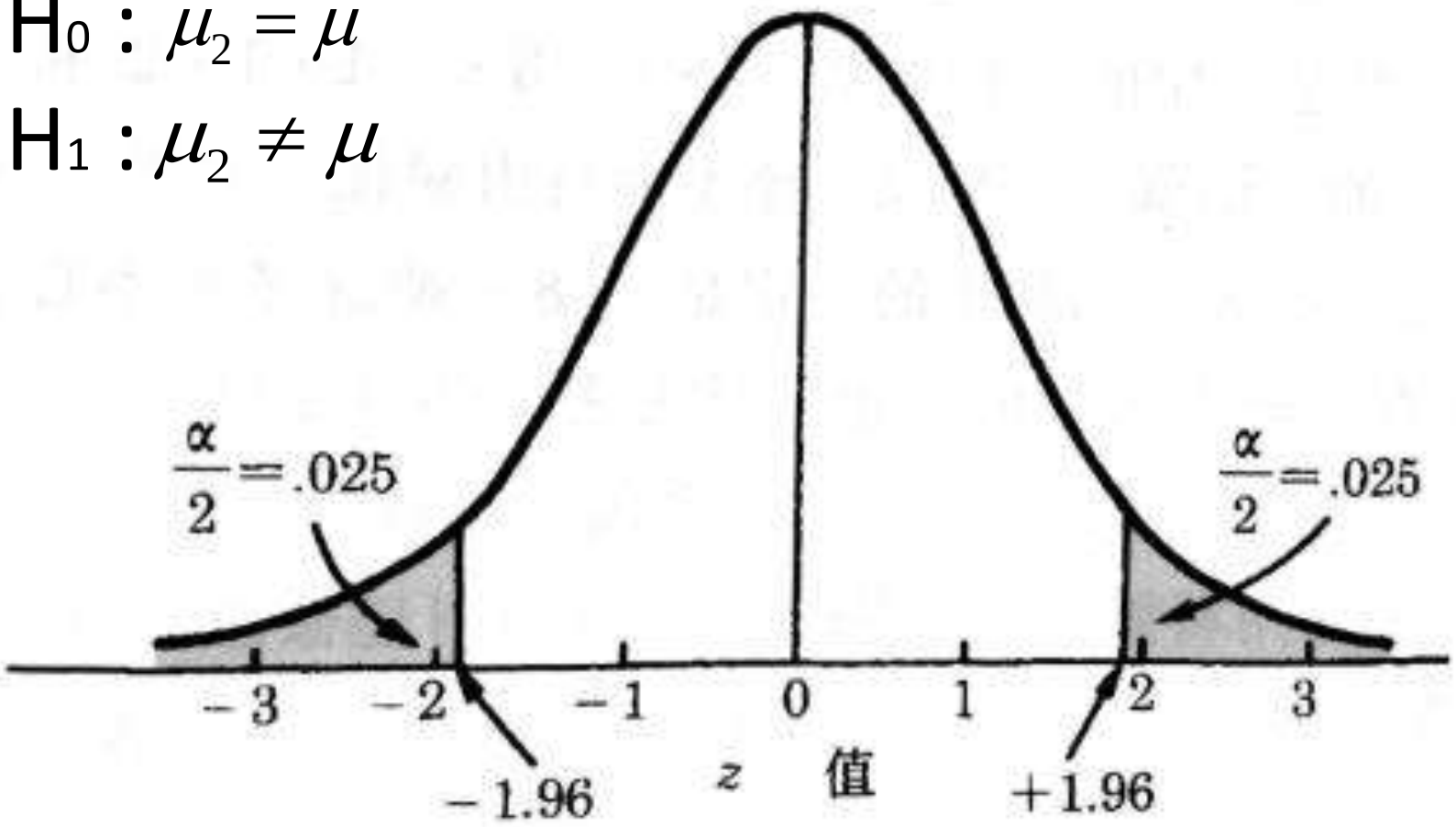


圖 10-4　雙側考驗時的拒絕區要拆成左右兩部分

自由度

- **自由度**（degree of freedom）：指某一變數眾多觀察值中，可以自由變動的數值的個數，即為自由度，通常用 df 表示。自由度的決定，是推論統計中的重點，隨著問題性質之不同自由度的大小也會有所不同。

第一類型及第二類型錯誤1

- 第一類型錯誤：當H_o為真，拒絕H_o所犯的錯誤。其概率以α表之，又稱為「顯著水準」，通常採.05或.01。

  若把α訂的很大（如.10），則很容易拒絕虛無假設。

第一類型及第二類型錯誤2

- 第二類型錯誤：當H_0為偽，卻接受H_0所犯的錯誤。其概率β以表之。

  如果將顯著性水準定得很低，例如α=.001時，將冒另一類的危險。此時，縱使對立假設是真的，研究結果卻很難極端到拒絕虛無假設。當虛無假設是假的，無法拒絕假的虛無假設，就犯了第二類型錯誤。因此，若α將訂的太小，則犯第二類型錯誤的機率增大。

- 以接受特殊教學學生測驗成績為例，如果接受特殊教學確能提昇學生成績；然某研究卻無法顯示這種事實，即樣本的平均成績與未接受特殊教學的平均數差不多，即研究結果沒有達到統計的顯著性，而無法拒絕虛無假設，此時便犯了第二類型錯誤。
- 應用研究特別在意第二型類錯誤，因為第二類型錯誤意味著一項確有效果的程序，結果卻無法獲得支持。
- 若要降低犯第二類型錯誤的機率，則可將顯著水準訂得寬鬆些，例如將顯著水準定為0.10或者是.20，此時，研究結果只要有些微的差距，就能達到統計的顯著性，然而此時所付出的代價，是犯第一類型錯誤的機率就大增了。

- 設定顯著水準時，避免犯某一類型的錯誤，犯另一類型錯誤的機率就增加。

  例如:降低犯第一類型錯誤的機率，犯第二類型錯誤β的機率就增加。因為顯著水準定得很小時，如.001時，縱使研究假設是真的，研究結果很可能無法極端到可以拒絕虛無假設。

- 要同時降低犯兩種類型錯誤的機率是不可能的（魚與熊掌不可兼得），唯一可以做的是在兩種錯誤間取得妥協，通常把顯著水準定為5%或1%。

第一類型錯誤與第二類型錯誤的關係

		母群的 真正性質	
		H_0為真	H_0為偽
裁決	拒絕H_0	第一類型錯誤 α	裁決正確 $(1-\beta)$ 統計考驗力
	接受H_0	裁決正確 $1-\alpha$	第二類型錯誤 β

統計考驗力的意義

- 統計考驗力：正確拒絕H_0的概率，以（$1-\beta$）表之。統計考驗力是指研究假設是真的時，研究結果達到統計顯著性的機率，必須注意實驗的統計考驗力只有在研究假設（即對立假設）是**真**(true)的時候才發生。如果研究假設是假的，研究者並不希望研究結果達到統計的顯著性。然而，如果研究假設是真的，研究結果是否一定達到統計的顯著性呢?答案是否定的，因為從母群所抽取的樣本，其分數可能沒有極端到可以拒絕虛無假設。

- 統計考驗力是指達到目標的能力。一般而言，研究目的是在對立假設確為真的時，獲得顯著性的結果，而統計考驗力是指對立假設是真時，獲得顯著性結果的機率。

- 統計考驗力有許多用處：

  (1)在收集資料之前，計算統計考驗力，可以知道需要多少受試者才能達到統計的顯著性。

  (2)閱讀研究報告時，瞭解統計考驗力，能正確瞭解未達到統計的顯著性、達到統計的顯著性卻沒有實際的顯著性的意義。

影響統計考驗力的因素

- 研究的統計考驗力主要取決於前兩個因素:
  1. 研究的預期實驗效果（effect size）--兩個母群的平均數差異越大，實驗效果越大，統計考驗力就越大
  2. 研究的樣本大小：人數越多，統計考驗力越大
  3. 顯著水準：採用嚴格的顯著水準，會減少統計考驗力。
  4. 單側或雙側考驗：雙側考驗之統計考驗力較小
  5. 使用的假設考驗步驟

計算統計考驗力的步驟

1. 蒐集資訊：（a）比較分配（即母群二）的平均數和標準差，（b）母群一預期的平均數
2. 決定比較分配臨界值（z_2）的原始分數
3. 決定此臨界值（z_2）在母群一分配上的z值（z_1）
4. 使用常態分配表，決定大於此臨界z值的機率

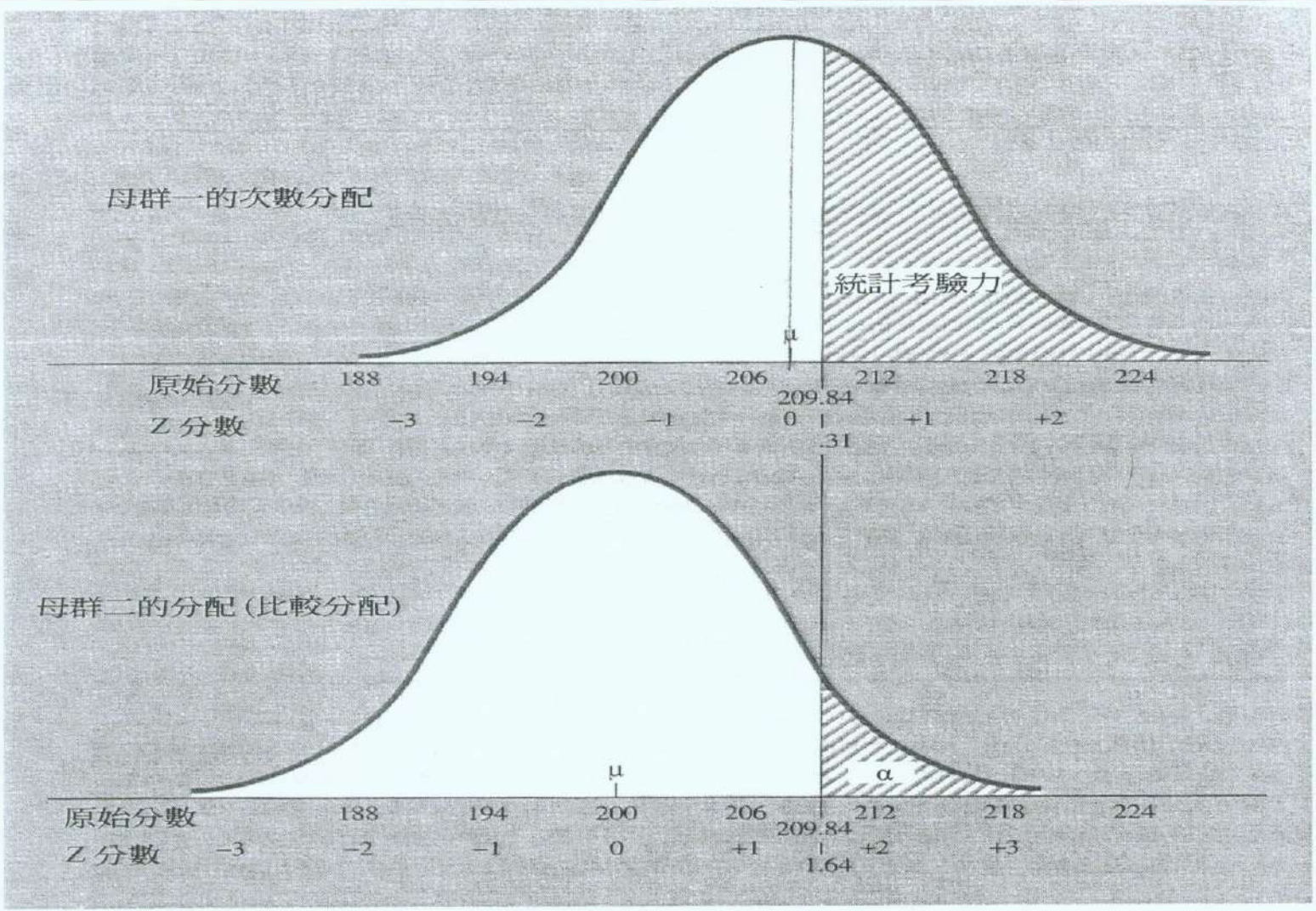


圖 8-2　64 名學生平均數的次數分配

μ_2 =200，$\sigma_{\bar{x}}$=6 ，μ_1=208

z_2 =1.65

=6×（1.65）＋200=209.9

z_1=（209.9-208）÷6=0.32

0.32→1255

.50+.1255=. 6255， β =. 6255

所以1- β =.3745

z分配

就是將樣本平均數轉換為z分數，則

$$z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

此分配將近似於N（0，1）

Z分配

- 當母群性質已知（σ 已知）時，

  樣本平均數的平均數 $\bar{\bar{X}} = \mu$

  變異誤 $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{N}$

  標準誤 $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}$

  Z分配（$z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}$）為常態分配

t分配

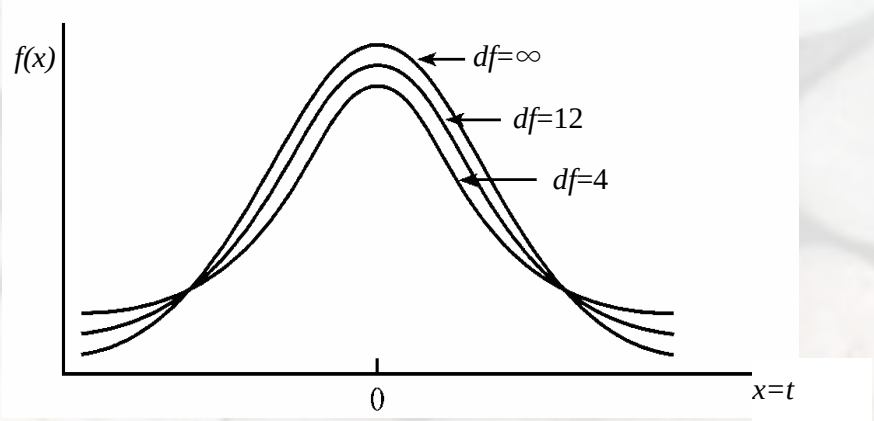
1. t分配為一機率分配，每一種自由度，各有其對應的機率分配。
2. t分配是一種對稱分配（偏態係數為零），以t=0為對稱軸，其期望值為零，變異數為：df/(df-2)
3. t分配為高狹峰
4. 自由度趨向無限時，t 分配以常態分配為其極限。

t分配

- 使用時機
  - 用來發展當常態母體變異數未知的情況下，平均數 μ 的推論方法。
  - 用來發展當兩個常態母體變異數未知，且樣本皆為小樣本情況下，兩母體平均數差的推論方法。
  - 可用於變異數分析之事後檢定，以及相關分析、迴歸分析之推論 。

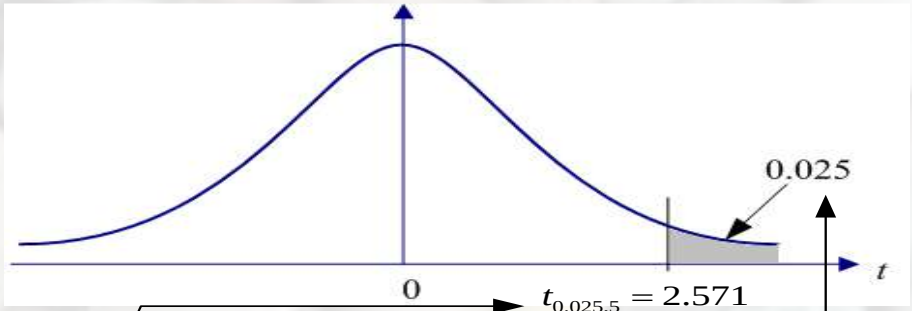
t分配

- *t*分配的變異數隨著自由度的變化而變動
  - 自由度越大，變異數越趨近於1，接近標準化常態分配
  - 自由度越小，變異數越大於1，也就是比標準化常態分配更趨於分散扁平



t分配查表

$t_{0.025,5} = 2.571$



Degrees of Freedom	Area in Upper Tail .20	.10	.05	.025	.01	.005
1	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656
2	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250

t分配

- 當母群性質未知（σ 未知）時，樣本平均數的

平均數 $\overline{\overline{X}} = \mu$

變異誤 $s_{\overline{X}}^2 = \frac{s_X^2}{N}$ $s_X^2 = \frac{\sum (X - \overline{X})^2}{N-1}$

標準誤 $s_{\overline{X}} = \frac{s_X}{\sqrt{N}}$

此時之分配是為t分配 $t = \frac{\overline{X} - \mu}{s_{\overline{X}}}$

- 當母群性質未知（σ未知）時，自常態分配的母群抽出無限多個樣本，每一個樣本都計算出S_X和$S_{\bar{X}}$，以及 $\frac{\bar{X}-\mu}{S_{\bar{X}}}$。
- 當N較小（N＜30）時，S_X的分配為偏態，$S_{\bar{X}}$的分配亦成偏態。
- 在許許多多 $\frac{\bar{X}-\mu}{S_{\bar{X}}}$中，分子的分配將成常態，但分母的分配卻為偏態。

- 其比值（$\frac{\bar{X}-\mu}{S_{\bar{X}}}$）之分配叫做t分配。

  此分配之平均數為0，左右對稱，成高狹峰。

- 當N＞30時，此分配會愈來愈接近常態分配。
  當N趨於無窮大時，此分配即成常態分配。

t分配

- 當H_1：$\mu_1 > \mu_2$之單側考驗時，$t_{1-\alpha,(N-1)}$

  當H_1：$\mu_1 < \mu_2$之單側考驗時，$t_{\alpha,(N-1)}$

  當H_1：$\mu_1 \neq \mu_2$之雙側考驗時，$t_{\frac{\alpha}{2},(N-1)}$、$t_{1-\frac{\alpha}{2},(N-1)}$

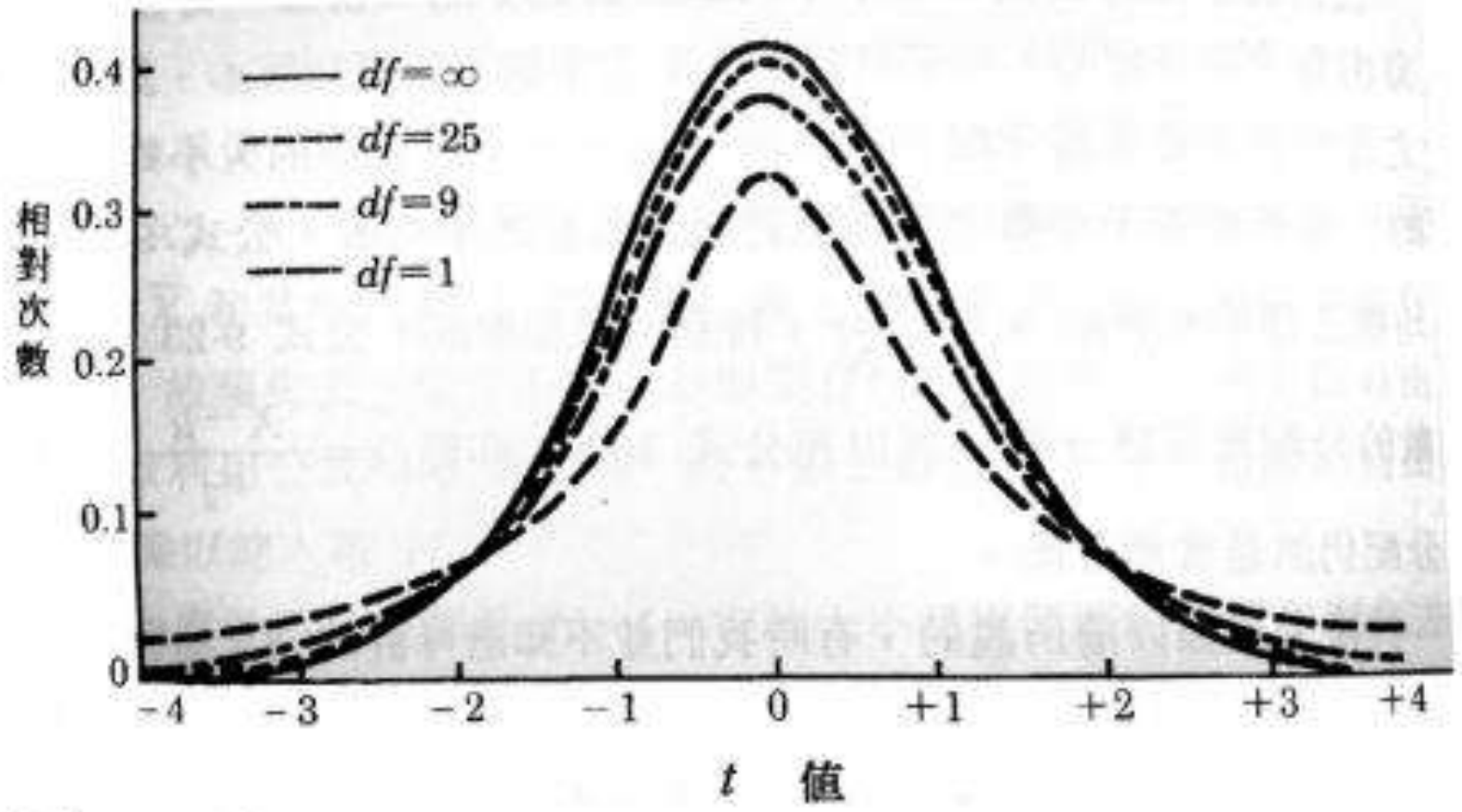


圖 10-5 當 df 爲 1，9，25 時的 t 分配曲線（虛線）和常態分配曲線（實線）的比較（Ferguson, 1971, p.140）。

當$H_1：\mu_1 > \mu_2$之單側考驗時，
通式為$t_{1-\alpha,(N-1)}$

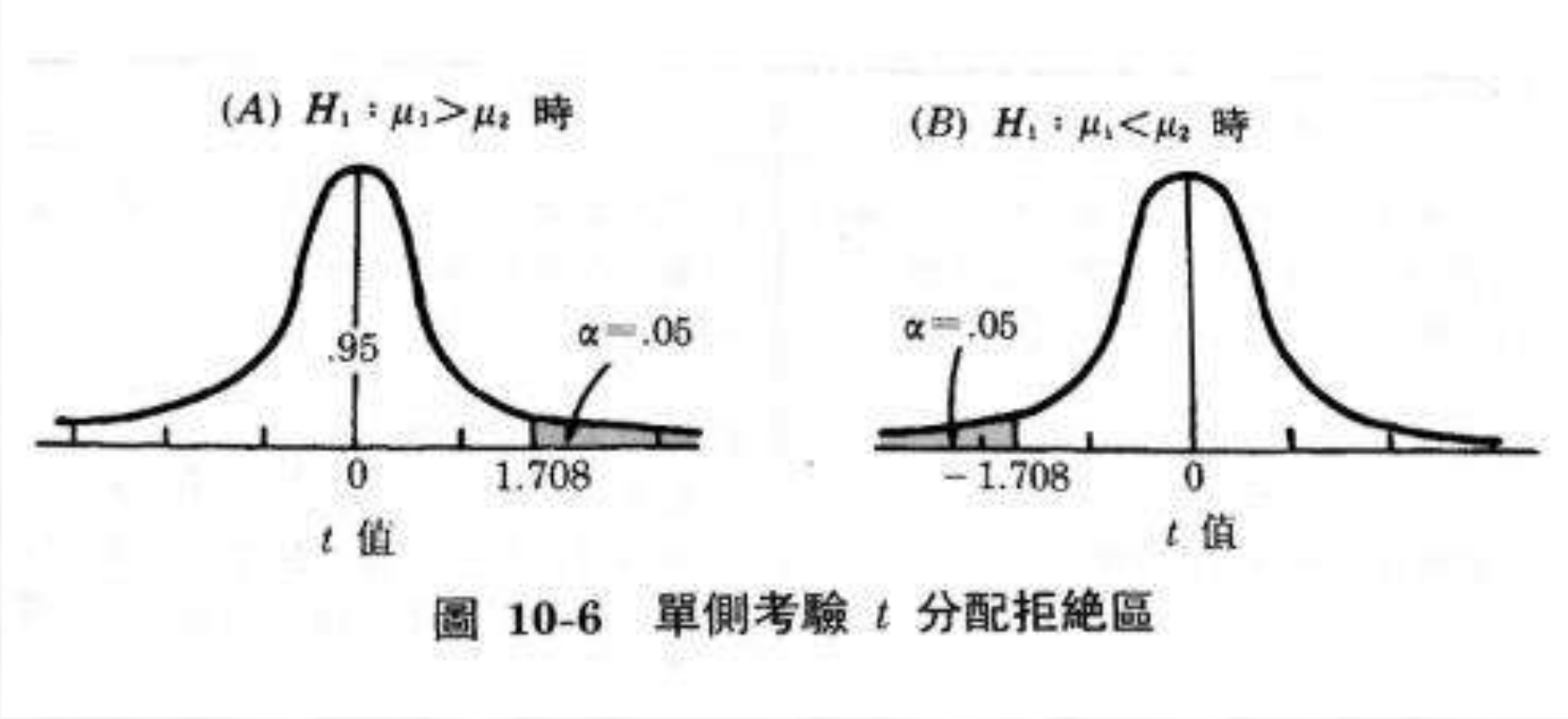


圖 10-6　單側考驗 t 分配拒絕區

當H_1： $\mu_1 \neq \mu_2$ 之單側考驗時，

通式為 $t_{1-\frac{\alpha}{2},(N-1)}$ 或 $t_{\frac{\alpha}{2},(N-1)}$

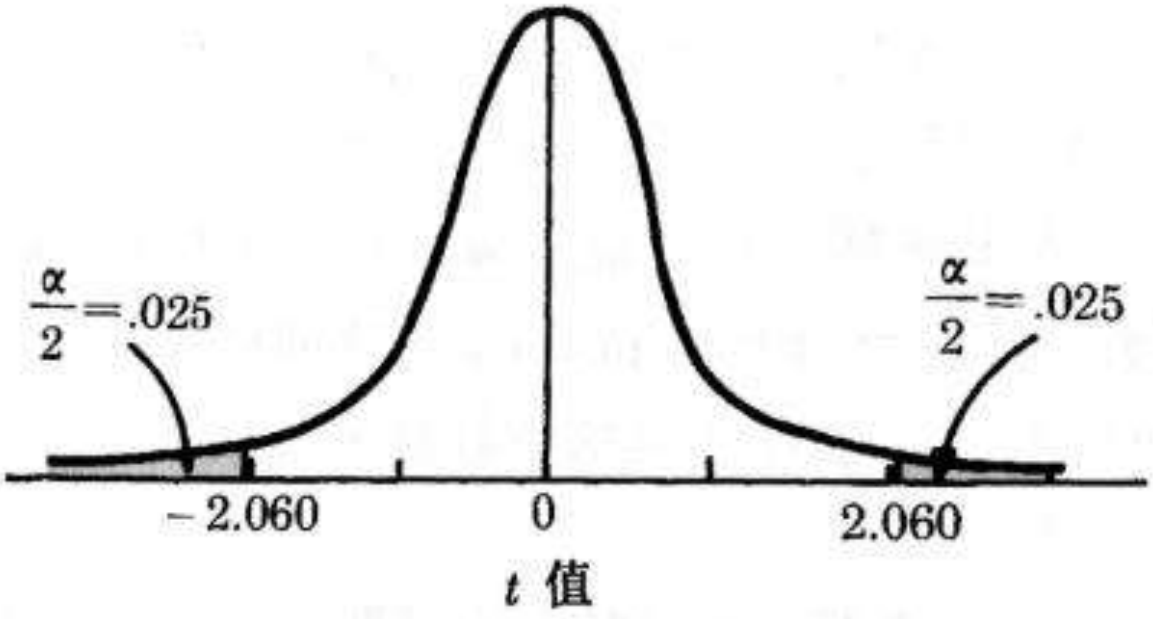


圖 10-7 雙側考驗和 $df=25$ 時 t 分配的臨界區

χ^2分配

- 主要用於類別資料(categorical dada)的檢定
- 適用於三種檢定
  - 適合性檢定（Test of goodness of fit）

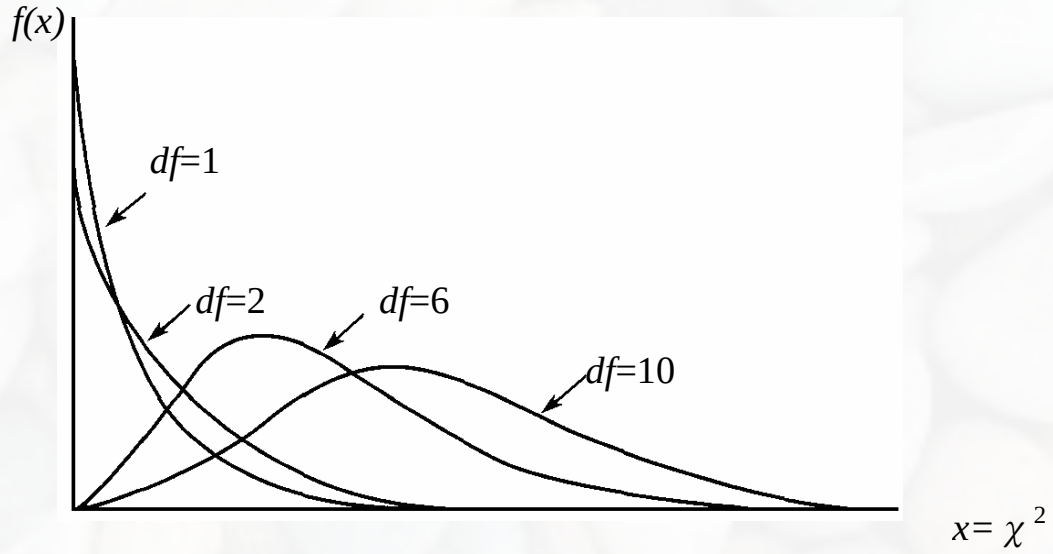
    單一變數類別資料分析：例如消費者對不同口味飲料之喜好無顯著差異。
  - 獨立性檢定（Test of independence）

    離散型變數之相關性：例如男生與女生滿意度無顯著差異。
  - 同質性檢定（homogeneous test）

    兩變數類別資料分析：例如甲乙丙丁四個單位員工滿意度無顯著差異。

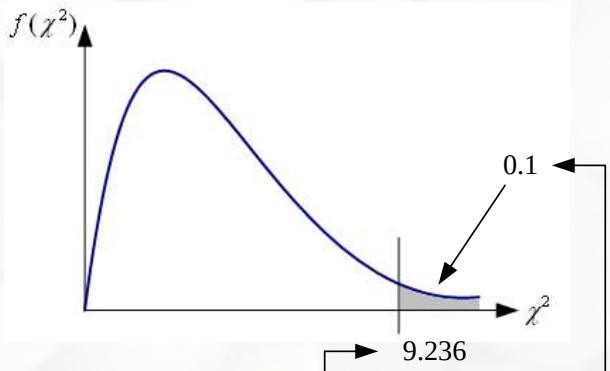
χ^2分配

- 在不同的自由度下，卡方分配的形狀有所不同
  - 當自由度小時，分佈呈現正偏態不對稱分佈
  - 當自由度越大，分佈逐漸形成常態分佈



χ^2分配查表

$$\chi^2_{0.1,5} = 9.236$$



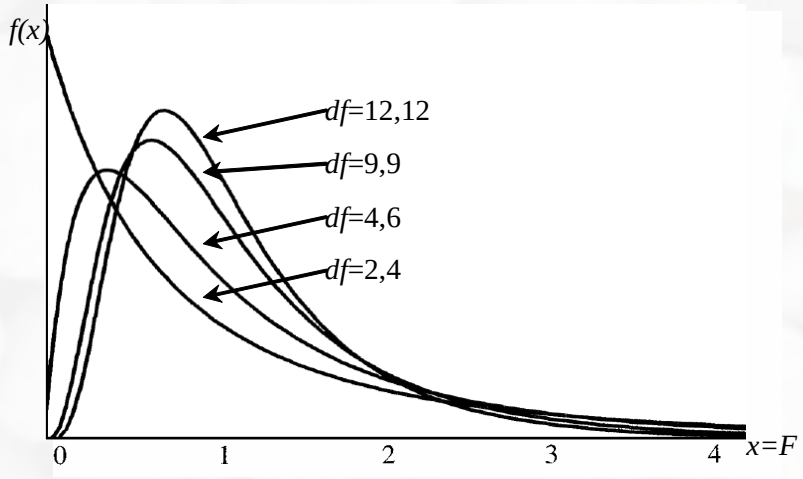
Degrees of Freedom	Area in Upper Tail									
	.995	.99	.975	.95	.90	.10	.05	.025	.01	.005
1	.000	.000	.001	.004	.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	.010	.020	.051	.103	.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	.072	.115	.216	.352	.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	.207	.297	.484	.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	.412	.554	.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750
6	.676	.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188

*F*分配

- 使用時機
  - 變異數分析
  - 迴歸分析中之檢定
  - 檢定兩個常態母體變異數是否相等

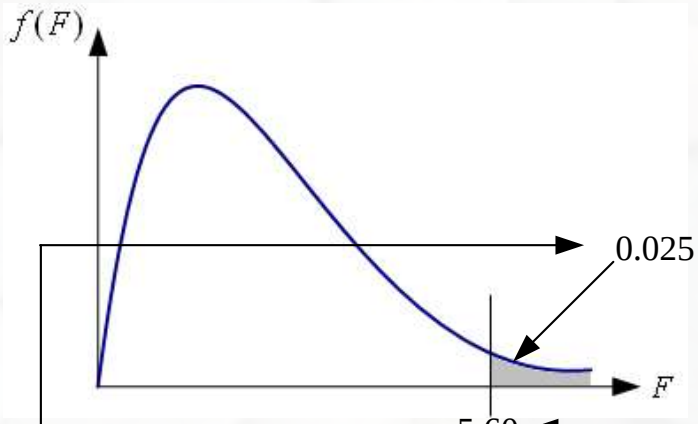
F分配

- F量數是由自由度為v1與v2的兩個卡方變數之比值，以F（v1, v2）表示，當自由度小時，F分配呈現正偏態，自由度越大，越接近常態分配



F分配查表

$F_{0.025,8,6} = 5.60$



分母自由度

分子自由度

Denominator Degrees of Freedom	Area in Upper Tail	Numerator Degrees of Freedom												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25
6	.10	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.87	2.84	2.81
	.05	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	3.94	3.87	3.83
	.025	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.27	5.17	5.11
	.01	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.56	7.40	7.30
7	.10	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.63	2.59	2.57
	.05	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.51	3.44	3.40
	.025	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.57	4.47	4.40
	.01	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.31	6.16	6.06

基礎推論統計的分類系統

依變項	獨變項					
		類別		連續		類連混和
	無	一	多	一	多	多
連續	Z 檢定 t 檢定 區間估計	Z 檢定 t 檢定 單因子 ANOVA 單因子 ANCOVA[a]	多因子 ANOVA 多因子 ANCOVA[a]	相關 簡單迴歸 淨相關/部分相關[a]	多元迴歸 曲線迴歸	虛擬迴歸 ATI 迴歸[a]
		B		**C**		
類別	卡方檢定	卡方檢定	多重列聯表分析[b] 對數線性模式[b]		邏輯迴歸[b] 區別分析[b]	虛擬邏輯迴歸[b]
	A	**D**			**E**	

註： a 帶有共變項時的統計方法。

b 傳統上被視為多變量統計技術

例題示範-配合題

A.(　)樣本的標準差

B.(　)母群的標準差

C.(　)母群標準差得不偏估計值

D.(　)根據X預測Y時的估計標準誤

E.(　)樣本平均數的標準誤，σ未知時

F.(　)樣本平均數的標準誤，σ已知時

1. $s_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{N}}$

2. $\sigma = \sqrt{\frac{\sum\left(X - \bar{X}\right)^2}{N}}$

3. $s_{Y \cdot X} = \sqrt{\frac{\sum\left(Y - \hat{Y}\right)^2}{N-2}}$

4. $S = \sqrt{\frac{\sum\left(X - \bar{X}\right)^2}{N}}$

5. $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

6. $s = \sqrt{\frac{\sum\left(X - \bar{X}\right)^2}{N-1}}$

例題示範-是非題

1.(　) $z=\frac{X_i-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}$ ，而 $z=\frac{X_i-\mu}{\sigma}$

2.(　)σ未知時，要用 $s=\sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{X})^2}{N-1}}$ 來當作σ的不偏估計數

3.(　)猜測某甲的大學聯考成績會得 $\hat{Y}$ =382分，是屬區間估計；
猜測某乙的大學聯考成績會落在320~405分，是屬點估計。

4.(　)當看P<.01時，就表示研究者用α=.01，結果拒絕虛無假設。

5.(　)隨機抽樣是指自母群中抽取一部份樣本，使合乎均等概率和獨立概率的條件
；隨機分派(random assignment)是指以隨機的方式將受試者分派到不同的組別
以便接受不同的實驗處理。

例題示範-是非題

6.(　) $s_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{N}}$ 時， $s = \sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{X})^2}{N}}$

7.(　)拒絕虛無假設時，可能會犯第一類型錯誤；接受虛無假設時，可能會犯第二類型錯誤。

8.(　)σ未知時，表示要抽樣；要用 $s = \sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{X})^2}{N-1}}$ 估計σ，要查*t*分配表來進行統計考驗。

9.(　)要考驗「女生的英語成績比男生的英語成績為好」的假設，是屬雙側考驗。

10.(　)α=.05時，如果考驗的結果，接受虛無假設，則有.05的機會犯第二類型錯誤。

例題示範-選擇題

(　)1.下列哪一種顯著水準是合理的？

(1)50　(2)25　(3)10　(4)05

(　)2.正確拒絕一個假的虛無假設的機率是多少?

(1)α (2)β (3)1-α (4)1-β

(　)3.在推論統計學中，下列什麼特性使得研究者傾向使用平均數，而不使用中位數或眾數？(1)一致性 (2)有效性 (3)不偏性

例題示範

- 已知比西智力量表(μ=100,σ=16)呈常態分配。假設從中抽取25人為隨機樣本接受測驗，並計算出平均數，然後重覆這項過程1000次。請問：

1. 這1000次樣本平均數所構成的分配的變異數和標準差各是多少？
2. 在N＝25的抽樣下，有多少百分比的樣本平均數會大於110？
3. 在N=25的抽樣下，有多少百分比的樣本平均數會介於90到110之間？

例題示範

- xx大學全體學生平均身高為165公分，標準差12，若隨機抽取一個班64人，平均身高為170，請問「樣本平均數是否顯著高於母體平均數」用何種考驗？單或雙尾？

- 某次段考後，依照學生分數劃分為A.B.C.D.E五個等第，其中XX班共30人，其分數以次數分配表加以整理呈現。試考驗「30位學生為A.B.C.D.E等第是否都是相等比例」

第十一章

一個母數的假設考驗和區間估計

統計考驗的基本原理

- 以抽樣理論為基礎
  - 抽樣分配的標準誤，表示隨機獲得參數的機率，一種誤差的概念
  - 從母體標準差推導而得

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \hat{\sigma}_{\bar{X}} = s_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

- 利用下列公式所計算得到的標準化統計量稱為*Z*統計量

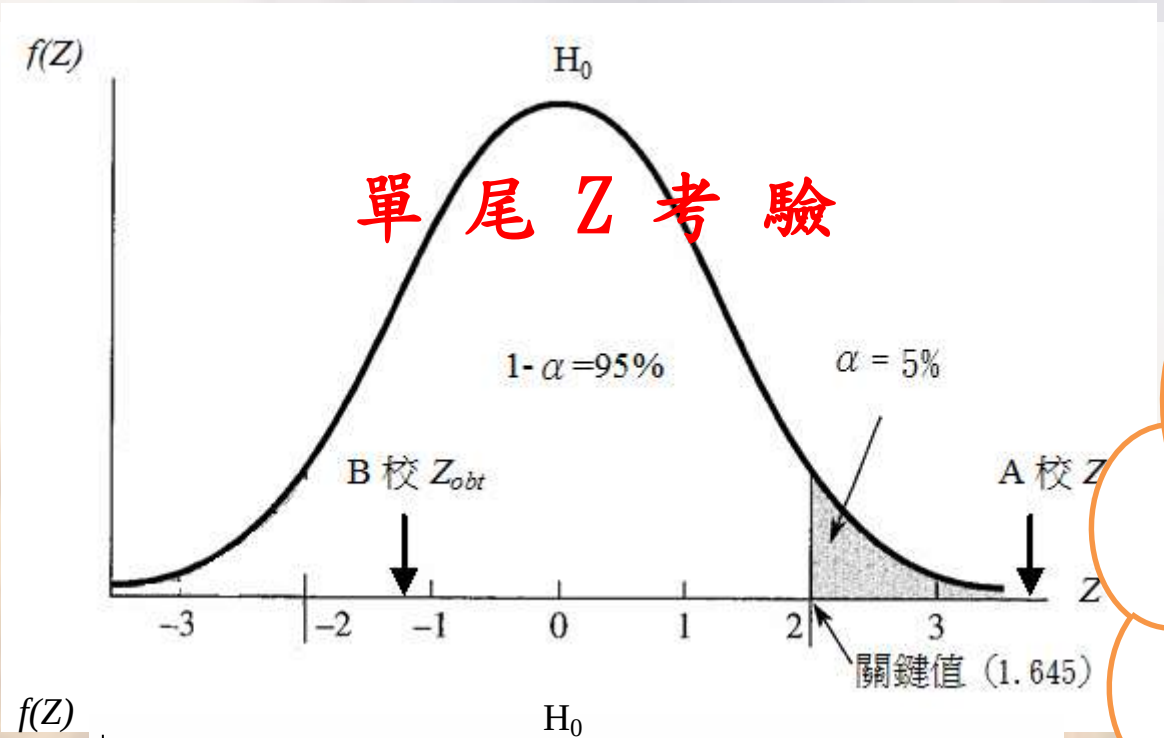
$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

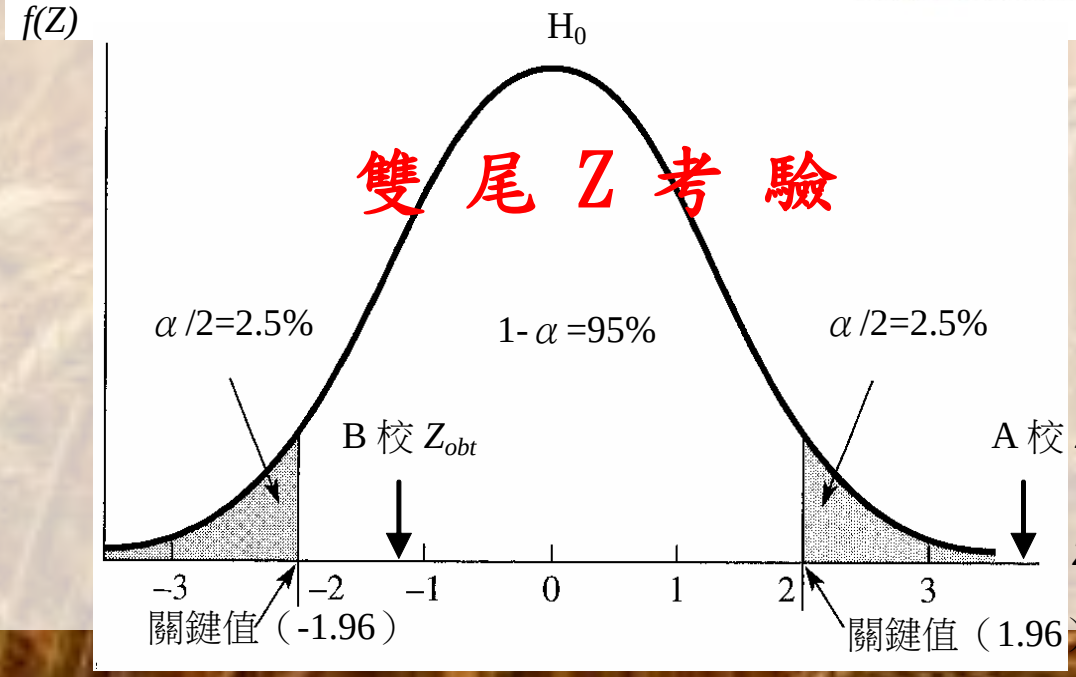
- 利用下列公式所計算出來的標準化統計量，則稱為*t*統計量（*t* statistic）

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

Z考驗的原理

- Z考驗所檢驗的是樣本平均數的統計意義
- 利用Z統計量的抽樣分配來進行假設考驗，稱為Z考驗（z test），由於Z考驗的機率分配是常態分配，因此又稱為常態離散考驗（normal deviate test）





Recall：

*單尾：

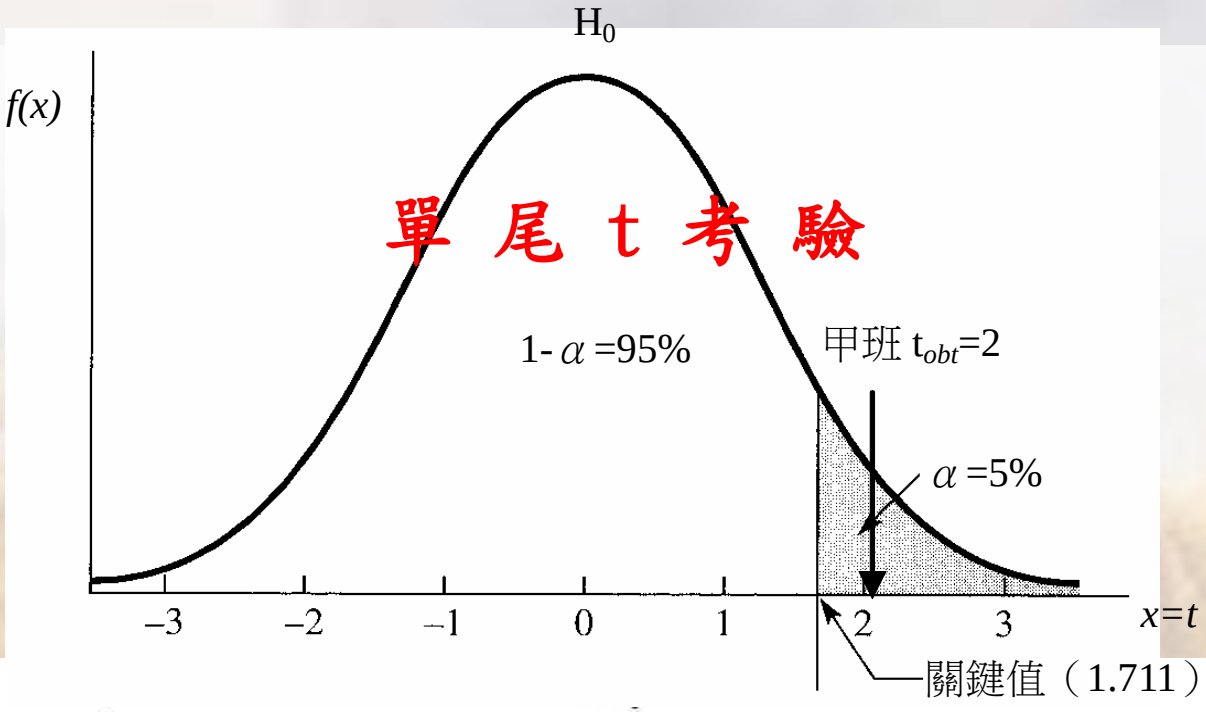
有方向性的

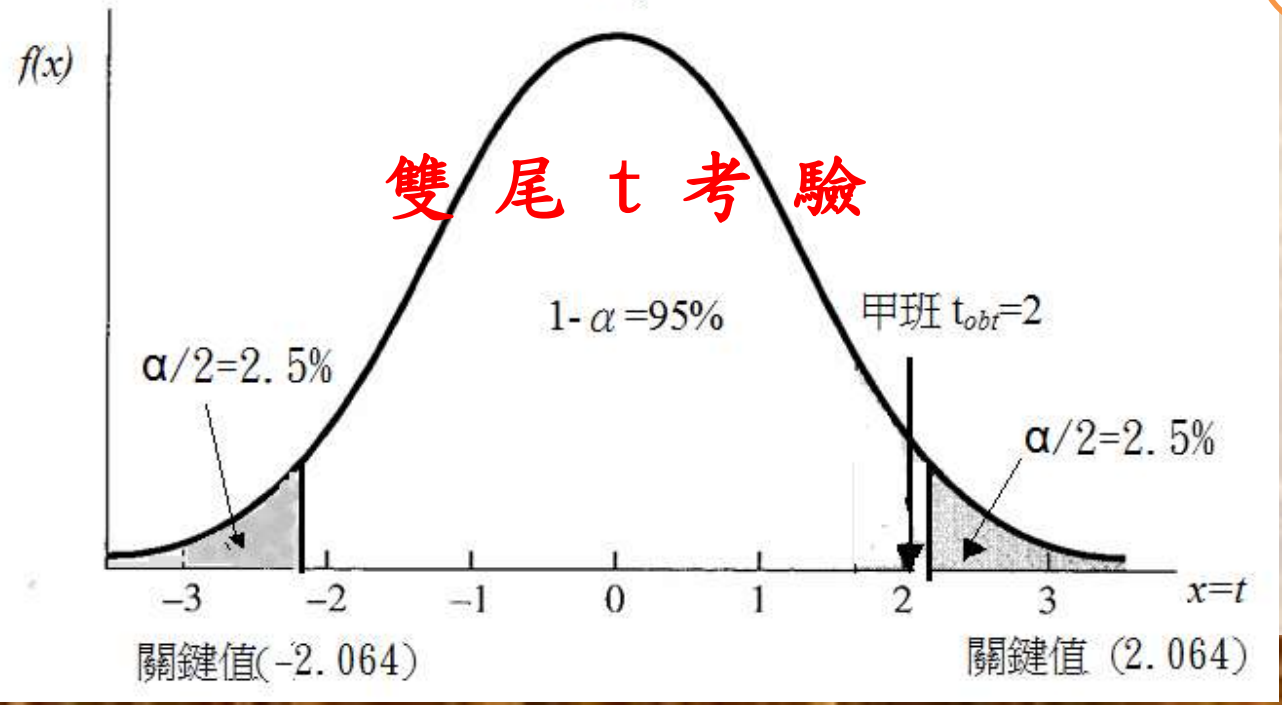
*雙尾：

無方向性的

t考驗

- 時機
  - 平均數考驗中，如果母體標準差（σ）未知，即無法獲得抽樣分配的標準誤，此時需使用樣本標準差（s）來估計母體標準差（σ），求出t統計量，配合t分配來檢定樣本的平均數。
- 自由度（degree of freedom）
  - 指一組數據在計算特定統計量的過程中，可以自由變動的數目。





單尾與雙尾檢驗由於具有不同的假設檢驗判斷值的設定，所以可能有**不同的結果**

區間估計

「**信賴區間**」（confidence interval，CI）

「**信賴水準**」（confidence level）：母數落在此一區間的機率

- **母群σ已知時之區間估計**

例11-1　某教師利用魏氏成人智慧量表（WAIS，平均數為100，標準差為15 ）測量100名該校高三學生，得平均智商117。試用區間估計法求該校高三學生的真正智商平均大約為多少。

母群的σ已知時

- **步驟1**：假定這100名學生被重複測量好幾千次，得到好幾千個 $\overline{X}$，這些 $\overline{X}$ 成常態分配

  （ μ，$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}$ ）

  然而，事實上我們只測量了一次，得$\overline{X}$ =117，故須假定此117為好幾千個 $\overline{X}$ 中的一個。

- **步驟2**：聲明犯第一類型錯誤（α）的概率有多大

  例如α =.05，則$Z_{.025}$=-1.96， $Z_{.975}$=1.96 ，所以

$$\overline{X} - z\frac{\sigma_X}{\sqrt{N}} < \mu < \overline{X} + z\frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}$$

- **步驟3**：WAIS的標準差是15，而 $\overline{X}$ =117，代入得

$$117 - 1.96\frac{15}{\sqrt{100}} < \mu < 117 + 1.96\frac{15}{\sqrt{100}}$$

$$114.06 < \mu < 119.94$$

- **步驟4**：結論是「該校高三學生的真正智商（μ）可能介於114到120之間，其概率是95% 」。唯此項估計仍有5% 的錯誤概率，即，有5% 的概率該校學生的μ不介於114到120之間。

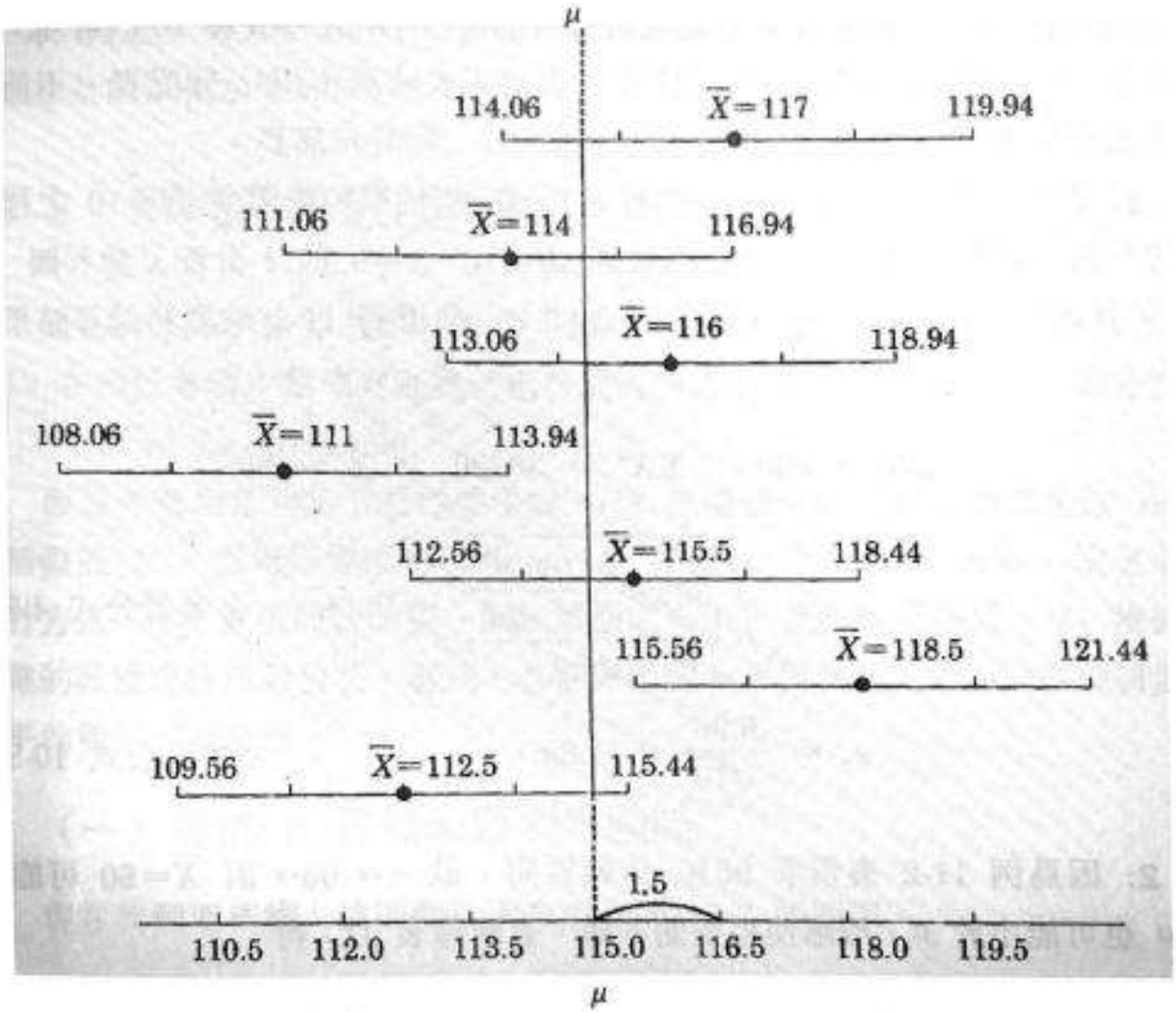


圖 11-1 假定 $\mu=115$，$\sigma_{\overline{X}}=1.5$ 時，無限多次重複抽樣，將有 95% 由 $\overline{X}$ 構成之區間包括有 μ 在內，但還有 5% 由 $\overline{X}$ 構成之區間則不包括 μ 在內。

母群的σ未知

- 母群σ未知時之區間估計

例11-2 某研究者想知道全體男大學生之體重的平均數（μ）和標準差（σ）。他自母群中隨機抽取10名學生測得體重為68，66，59，64，56，49，58，65，54，和61公斤。現在他要計算平均體重的95% 信賴區間，應如何進行？

- **步驟1**：$\overline{X}$ =60，假設此一樣本乃是反覆抽取的無限多N=10之樣本中的一個。因為母群的 σ 未知，所以必須使用不偏估計值s來估計σ。

$$s_X^2 = \frac{\sum (X - \overline{X})^2}{N-1} = \frac{36320 - \frac{600}{10}}{10-1} = 35.52$$

此時樣本平均數分配的標準誤是:

$$s_{\overline{X}} = \frac{s_X}{\sqrt{N}} = \frac{5.96}{10} = 1.89$$

- **步驟2**：95% 信賴區間， α =.05，查附錄表D（P.714）

$$t_{.025} = -2.262，\ t_{.975} = 2.262$$

$$\bar{X} - t \times \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t \times \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{X} - t_{.975}(1.89) < \mu < \bar{X} + t_{.975}(1.89)$$

$$60 - 2.262（1.89）< \mu < 60 + 2.262（1.89）$$

$$55.72 < \mu < 64.28$$

平均數的假設考驗

- 四個步驟：
  1. 寫出H_1 、 H_o
  2. 根據σ 已知或未知，決定統計方法
  3. 設定α，劃定拒絕區
  4. 進行分析、裁決&解釋

平均數的假設考驗

- 母群體σ已知＆單側考驗

例11-3 一位環境論者主張環境優裕可以提高兒童的智力，乃自環境優裕的家庭中隨機抽取98名兒童進行智力測驗。他利用比西智慧量表（μ=100，σ=16）測得結果，$\overline{X}$ =103。問是否可以支持環境優裕兒童的平均智商高於100的說法？

Step1： H_0 ： $\mu_x = \mu$， H_1 ： $\mu_x > \mu$

Step2： $$z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Step3： $\alpha = .05$，$z_{.95} = 1.65$

Step4： $z = \dfrac{103 - 100}{\dfrac{16}{\sqrt{98}}} = 1.86 > 1.65$

所以應拒絕H_0，即環境優裕兒童的平均智商高於100的說法獲得支持。

α, β, $(1-\beta)$的關係

- 在前例11-3裡，研究者把α訂為.05，實際計算結果把*Ho*拒絕。

->如果拒絕*Ho*時，事實上Ho為正確，我們便犯了第一類型錯誤，這一錯誤的概率將為α=.05

- 而若研究者一開始宣稱只願冒著犯.01的第一類型錯誤(α=.01)，則查附錄表A的結果， $z_{.1-.01}$=2.33，故實際觀察的z值必須大於2.33方可拒絕*Ho*。
- 因上述計算結果z=1.86，小於查表的$z_{.}$=2.33，未落入拒絕區，故應接受*Ho*，而說不能支持該環境論者之說法

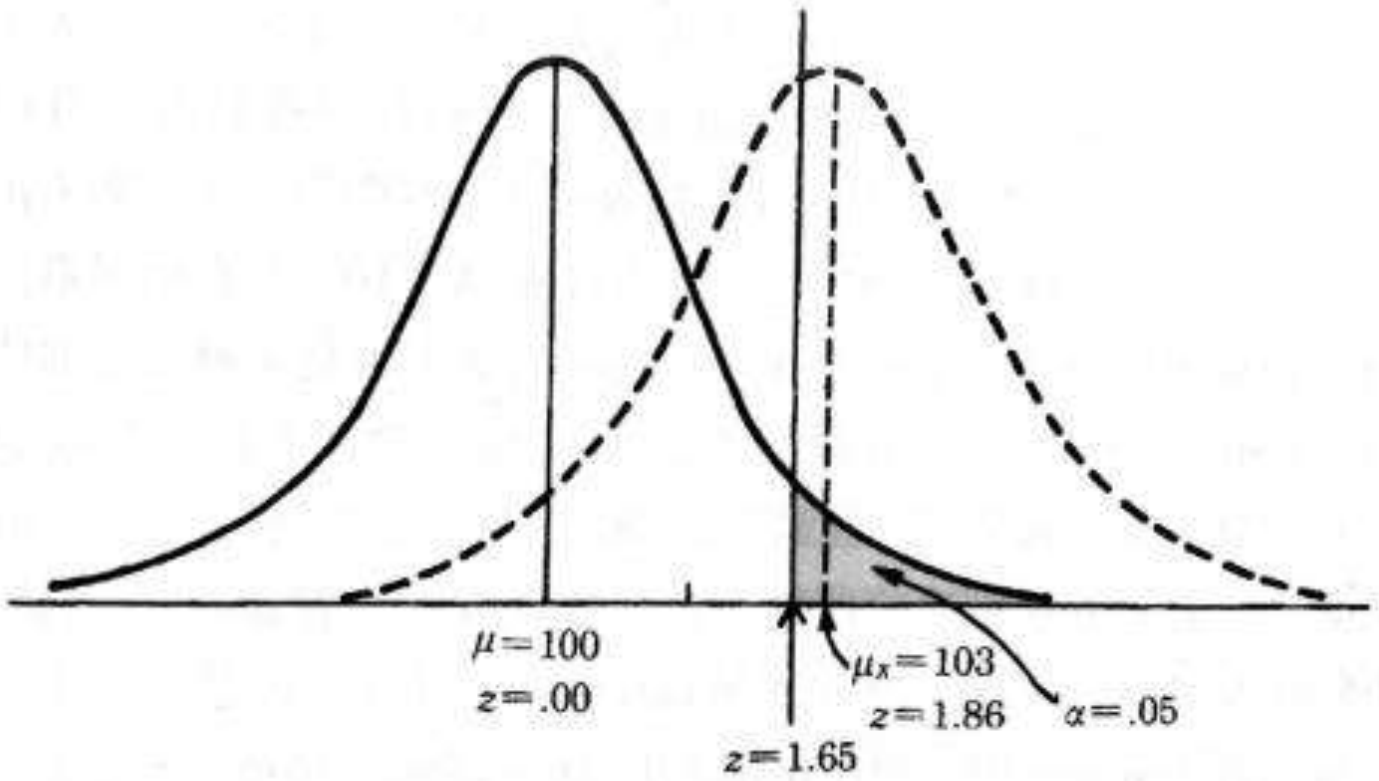


圖 11-2　拒絕 H_0 時，會犯第一類型錯誤，其概率爲 $\alpha = .05$

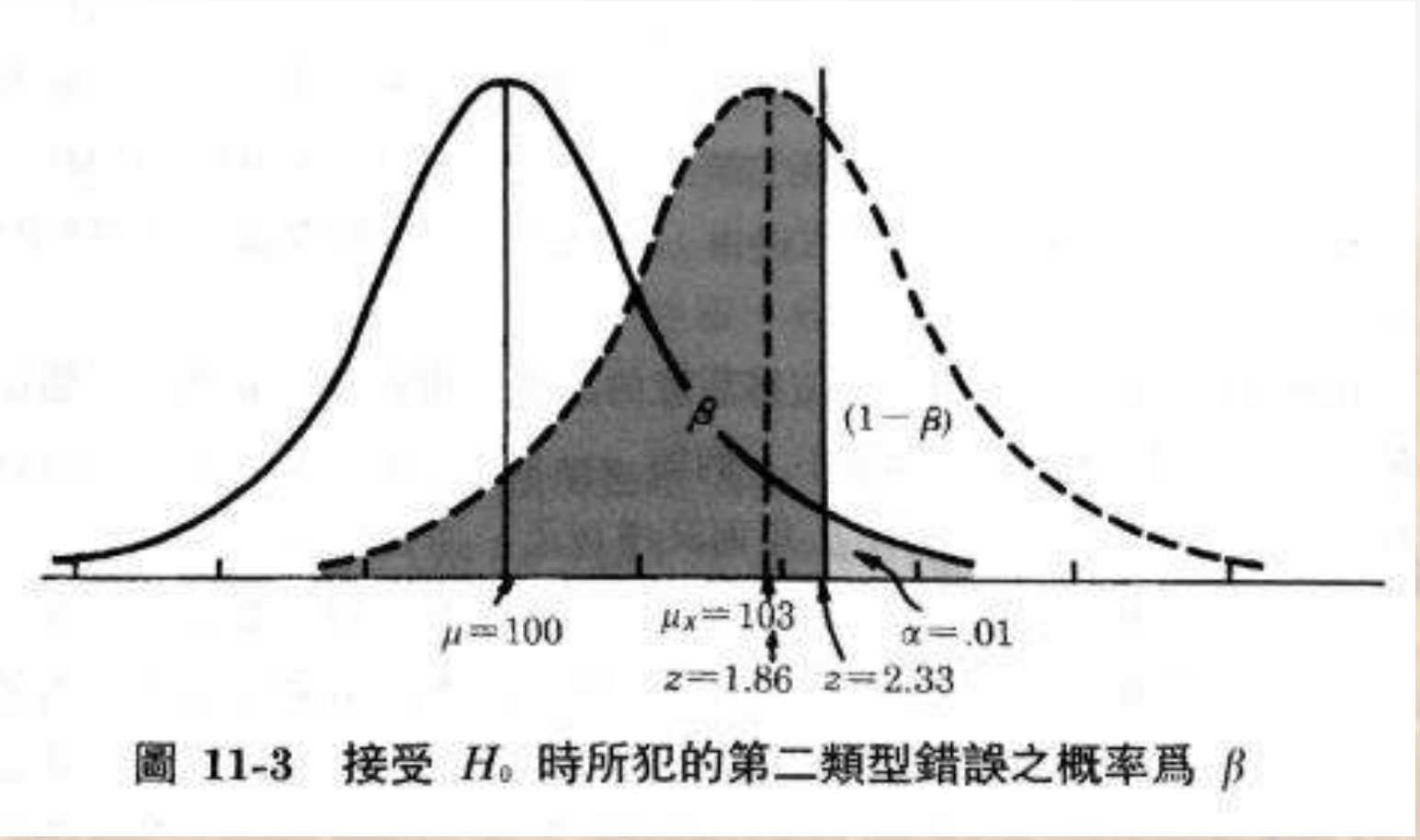


圖 11-3　接受 H_0 時所犯的第二類型錯誤之概率爲 β

當我們接受Ho時，所犯的第二類型錯誤為 β ，亦即為 μ_X=103 所構成之常態分配在臨界線(z=2.33)以左的部分。

->如果**接受*Ho***時，事實上Ho為假，則我們便犯了第二類型錯誤（β）

- 原先當我們接受Ho時，認為μ=100所構成的常態分配是對的，然而萬一μ_x=103所構成的常態分配曲線才是對的，則此一曲線在臨界線以左之部分尚有β那麼大
- 左邊曲線中，平均數為100,臨界線於離開此平均數（μ）2.33個標準誤之處，即$z_.$=2.33；

  $\overline{X}$=103是在離開此平均數（μ）1.86個標準誤之處，即$z_.$=1.86。

- 自$z_{.}$=2.332到 $z_{.}$=1.86的距離為.47個標準誤。查表得$z_{.}$=.47所代表的面積為.1808，因此臨界線左邊的面積為.1808+.5000，故β=.6808
- 當我們採用α=.01，而接受*Ho*，說環境優裕兒童之平均智商並不比一般兒童之平均智商為高時，我們應記住，犯第二類型錯誤之概率將有.6808

- 統計考驗力(1-β)為.3192，即圖11-3裡，臨界線以右的面積

- 注意：

  當避免犯第一類型錯誤，而將α定得更小(例如，α=.01)，則臨界線向右移。此時犯第二類型錯誤之概率β反而增加了，統計考驗力(1-β)也變得更小，即正確拒絕*Ho*的能力變更為降低了

假設考驗的主要邏輯

- 假設考驗的實施有一些標準步驟，它通常使用以下的推理:根據比西量表大量隨機施測的結果，兒童的平均智力為100，故一般兒童平均智力要高於100機率不高，若環境優裕兒童的平均智力顯著高於100，則拒絕環境優裕對智力之提昇沒有效果的假設；因為拒絕環境優裕對智力之提昇沒有效果的說法，即接受環境優裕對智力之提昇有幫助的說法。

如果不使用迂迴的方式，將無法進行多數的假設考驗，因為研究不管採用實驗法或問卷調查法，都只能評估實驗無效的機率，若研究無效的可能性很低，則研究假設獲得支持。

母群體σ已知&單側考驗

例11-4 某初三導師想知道他的46名學生的智力是否與一般初三學生的智力有所不同。利用某標準化智力測驗的結果，得 $\overline{X}$ =109。查該測驗初三的常模，得知 μ=113，σ=15。問該導師是否可以宣稱該班學生的智力與一般初三學生有所不同?

Step1： H_0 ： $\mu_x = \mu$， H_1 ： $\mu_x \neq \mu$

Step2：

$$z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Step3： $\alpha = .05$，$z_{.05/2} = -1.96$ $z_{1-(.05/2)} = 1.96$

Step4： $\overline{X} = 109$，$\mu = 113$，$\sigma = 1$

$$z = \frac{109 - 113}{\frac{15}{\sqrt{46}}} = -1.81$$ ，所以應接受 H_o

若以信賴區間來看

$$\overline{X} - (1.96)\sigma_{\overline{X}} < \mu < \overline{X} + (1.96)\sigma_{\overline{X}}$$

$$109 - 1.96\frac{15}{\sqrt{46}} < \mu < 109 + 1.96\frac{15}{\sqrt{46}}$$

$$104.67 < \mu < 113.33$$

因〔104.67，113.33〕包含113在內，故應接受 H_o

即，區間估計與假設考驗的結果一致。

母群體σ未知&單側考驗

例11-5 某健康教育專家認為惡性補習佔去初三學生運動的時間，剝奪他們鍛鍊身體的機會，故惡性補習初三學生的體重較輕於一般初三學生的體重。該專家自接受惡性補習初三學生之中隨機抽取十名學生，測得體重為46，42，39，44，49，43，40，50，42，和45公斤。今已知初三學生之平均體重為47.19公斤，問是否可以支持該專家的說法？

Step1： H_o ： $\mu_x \geqq \mu$ ， H_1 ： $\mu_x < \mu$

Step2： $t = \dfrac{\overline{X} - \mu}{s_{\overline{X}}} = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{s}{\sqrt{N}}}$

Step3： 假設α =.01， $H_1 : \mu_x < \mu$ ，df=N-1=9

$t_{.01(10-1)}$=-2.821

Step4：ΣX =440，ΣX^2 =19476，$\overline{X}$ =44. 0

$$s=\sqrt{\frac{\sum X^2-\frac{\left(\sum X\right)^2}{N}}{N-1}}=\sqrt{\frac{19476-\frac{(440)^2}{10}}{10-1}}=3.59$$

$$t=\frac{44.0-47.19}{\frac{3.59}{\sqrt{10}}}=-2.81$$

t= -2. 81並未落入拒絕區，故接受*Ho* ，接受惡性補習之初三生體重與一般生無異。

注意：

1. 顯著水準(α)一旦在實驗觀察前決定好，就不宜再變更
2. 在利用一定樣本大小的一次實驗觀察之後，已不可能再增加N的大小

母群體σ未知&雙側考驗

例11-6 某國小校長想知道該校辦理之營養午餐的效果是否不同於他校。已有資料顯示：所有參加營養午餐之三年級生在一年之間所增加之平均體重是3.48公斤。今校長自該校三年級生隨機抽取12名學童，其增加體重為：4.7，3.4，5.1，3.0，3.9，4.5，4.3，3.6，3.4，4.5，2.8和4.8公斤。問校長應如何解釋此一結果。

- **Step1**：H_O ：$\mu_x = \mu$，H_1 ：$\mu_x \neq \mu$

- **Step2**：因為母群的 σ 未知，所以必須使用不偏估計值s(以估計σ)及t公式。

$$s_X^2 = \frac{\sum (X - \bar{X})^2}{N-1} \qquad s_{\bar{X}} = \frac{s_X}{\sqrt{N}}$$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s_{\bar{X}}}$$

- **Step3：** α =.05，df=12-1=11
  $t_{.025}$（11）=-2.201
  $t_{.975}$（11）= 2.201

Step4： $s_{\bar{X}}$ =.22，t_{obs}=2.36
因為t_{obs}（ 2.36 ）＞ t_{crit}（2.201） ，
所以拒絕H_o。

結論：該校三年級實施營養午餐之效果與一般三年級不一樣。因落入右邊拒絕區，故知該校三年級實施營養午餐之效果較一般三年級為佳。

例題示範

- 大學生智力母體平均數為125，標準差16，如果A校數學系大一樣本數為100的隨機樣本，其智力平均數為135，請問以Z考驗檢驗『該樣本平均數是否顯著優於母體平均數』？
  - ANS：⇨ 單尾Z考驗

例題示範

- 某大學全體學生平均身高為165公分，標準差12，若隨機抽取一個班64人，平均身高為170，請問「樣本平均數是否顯著高於母體平均數」用何種考驗？單或雙尾？

第十二章
兩個母數的假設考驗

一直以來，我們對「是否有所不同」感到極大的興趣。男女生的細心程度是否有所不同？胖子是否比瘦子更開朗？富人是否比窮人更小氣？回教徒是否比其他宗教信仰者更好戰？西方人是否比東方人更自覺優越？諸如此類的問題不勝枚舉。

這都是屬於兩個母數的假設檢定的問題。

本章旨在討論兩個母數的問題，即比較兩個母群之間某一特質的差異，或比較同一母群中兩組人之不同。同時考慮不同情況之下的平均數是否有所差異，例如性別間工作壓力知覺的平均數比較、學習前與學習後的學習成就平均數是否有所改變，此時即牽涉到兩個平均數的考驗；不同平均數，可能計算自不同的受試者，亦有可能計算自同一個樣本的重複測量，或是具有配對關係的不同樣本。

實驗設計的基本概念

- 實驗設計旨在探討自變項與依變項之間是否有因果關係存在。

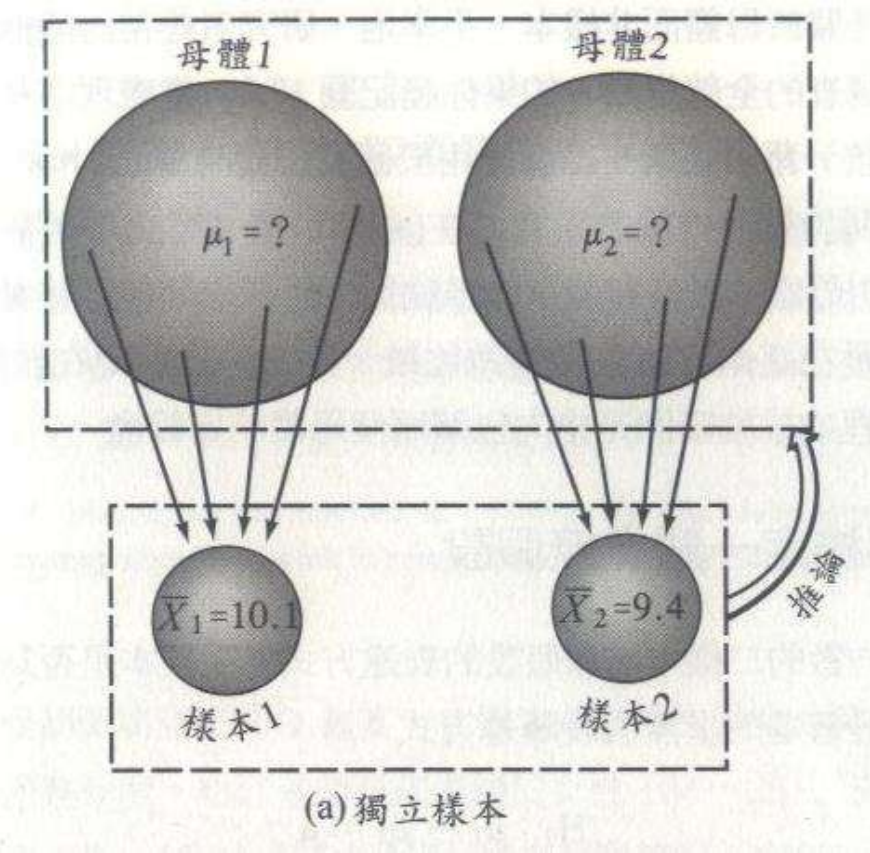
- 其中一種設計方式為「等組法」，此法以隨機抽樣和隨機分派的方式將受試者平均分派到實驗組或控制組，實驗組的受試者接受實驗處理（treatment）、控制組則接受不同於實驗處理之其他處理方法。當實驗組與控制組內的成員均是不相同的人，二組的反應之間無關係存在，此時稱這兩組彼此為「獨立樣本」（理論上，此兩組的相關為0），又稱為「受試者間設計」。

另一種設計方式為「單一組法」，有兩種模式：

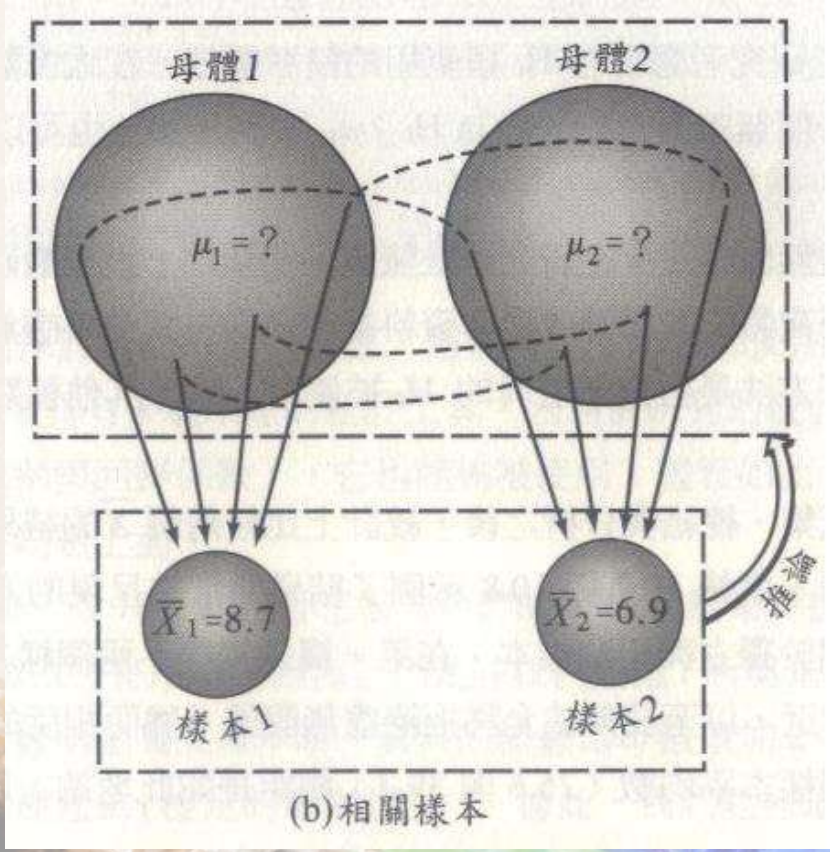
- 重複量數設計（repeated measure design）：只用一組受試者，例如前測、後測的研究設計。
- 配對樣本設計（matched sample design）：來自配對關係的不同樣本，例如夫妻兩人的薪資多寡。

- 此法每一個（組）受試者均接受一種以上的實驗處理，則不同處理所得之量數有關係存在（即 r不等於0），此時稱為「相依樣本」或「重複量數」，又稱為「受試者內設計」。

獨立樣本
（independent samples）



相依樣本
（dependent samples）



兩個「樣本平均數差異」顯著性檢定

- 如果我們要比較「大學男生還是女生的EQ較高」時，我們會分別從男生中抽取樣本，也自女生中抽取樣本，所以基本上男女生各有其平均數和變異數，也可以帶出男生樣本平均數的抽樣分配和女生樣本平均數的抽樣分配。

- 不過此時我們關心的焦點不再是樣本平均數的抽樣分配，而是一個新的統計量「兩個樣本平均數之差異」（ $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ ）的抽樣分配，當樣本人數夠大時，這個抽樣分配會近似常態分配，其平均數和變異數分別如下：

平均數： $E(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$

變異誤：($Cov = \rho\sigma_{X1}\sigma_{X2}$ ， $\rho = 0$)

$$V(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \sigma^2_{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)} = \sigma^2_{\overline{X}_1} + \sigma^2_{\overline{X}_2} - 2Cov = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} - 0$$

t考驗的假定

在t考驗的邏輯裏，常態分配是一個必要的條件。也就是說，常態分配是t考驗的一個假定（assumption）。不幸的是，當你在進行t考驗時，你無法得知母群是否為常態分配。這是因為在進行t考驗時，通常你擁有的只有樣本分數而已。統計學家發現，在實際的研究中，即使母群不完全是常態分配，你還是可以用t考驗得到大致正確的結果。換句話說，t考驗仍然相當強韌（robust），足以凌駕此種情形。

（兩獨立樣本）平均數差異的次數分配

就某種意義上而言，我們是利用兩個步驟，從個別分數的次數分配中，得到平均數差異的次數分配：首先，每個母群個別分數的次數分配中，都會有一個平均數的次數分配；其次，若我們從這兩個平均數次數分配中隨機各自取出一個平均數來配對，就可以得到每對平均數之間差異的次數分配。

（兩獨立樣本）平均數差異的次數分配

我們可以將這個平均數差異的次數分配，想成是由下列步驟逐次建構而成的：

（1）從母群一的平均數次數分配中，隨機選取一個平均數。

（2）從母群二的平均數次數分配中，隨機選取一個平均數。

（3）將兩者相減，產生兩者的差異分數。

（4）重複1到3之過程，產生第二個差異分數。

（5）將此過程重複無數次後，就會產生平均數差異的次數分配。

（兩獨立樣本）平均數差異的次數分配

我們可以把「平均數差異的次數分配」想成是一個t次數分配。獨立樣本t考驗的目標，就是要決定，究竟你的兩個真正樣本之平均數差異，是否比在這個「平均數差異的次數分配」上的臨界（決斷）值還要極端。

這整個程序真的是一種複雜的空中樓閣；它只存在我們的腦中，幫助我們根據一個真實實驗得到的結果，來做出一些決定。在這一切當中，唯一具體的事實，就是在這兩個樣本中的實際分數。利用這些樣本分數，可求得「平均數差異的次數分配」的變異數。

雙獨立樣本之六個關鍵細節

1. 「平均數差異的次數分配」的平均數$\mu_1 - \mu_2$ 。
2. 母群變異數的不偏估計值s_w(合併之變異數估計值)。
3. 兩個平均數次數分配的變異數$Var(\overline{X_1})$、$Var(\overline{X_2})$。

$$Var(\overline{X_1}) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} \text{、} Var(\overline{X_2}) = \frac{\sigma_2^2}{n_2} \text{。}$$

4. 「平均數差異的次數分配」的變異數與標準差。
5. 「平均數差異的次數分配」之分配為 t 分配。
6. 「平均數差異」之檢定統計量T。

兩獨立樣本平均數差異的檢定統計量（一）

（1）當母體標準差σ_1和σ_2均已知時，且樣本數大於30（且$\sigma_1 \neq \sigma_2$）時，使用Z分配考驗。

因此，兩平均數差異的檢定統計量Z為：

$$Z = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

（2）當母體標準差σ_1和σ_2未知時，且樣本數大於30，此時標準誤需以樣本標準差S_1和S_2估計：$Z = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$

兩獨立樣本平均數差異的檢定統計量（二）

當母體標準差σ_1和σ_2未知，且樣本數小於30，（且$\sigma_1 = \sigma_2$）時，變異誤需以加權方式$s_w^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$來合併估計母體變異數。

兩平均數差異的檢定統計量應使用**檢定統計量T** ：

$$T = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_w^2}{n_1} + \frac{s_w^2}{n_2}}}$$

此時的自由度為 $n_1 + n_2 - 2$ 。

兩獨立樣本平均數差異的檢定統計量（三）

當母體標準差σ_1和σ_2未知，且樣本數小於30，（且$\sigma_1 \neq \sigma_2$）時，標準誤的估計量為$\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$。兩平均數差異的檢定統計量為T ：

$$T=\frac{(\overline{X_1}-\overline{X_2})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}\sim \mathrm{t(r)}$$

$$\text{其中}r=\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1-1}\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2+\frac{1}{n_2-1}\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}\text{，}$$

若r不是整數，則採四捨五入至整數。

- **獨立樣本**

＊當兩個母體σ_1 和σ_2 已知時

回憶：(Ch7 差的變異數)

r=0時， $S^2_{(X-Y)} = S^2_X + S^2_Y$

ρ =0時，$\sigma^2_{(X_1-X_2)} = \sigma^2_{X_1} + \sigma^2_{X_2}$

∴當 ρ =0時，

$$\sigma^2_{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)} = \sigma^2_{\overline{X}_1} + \sigma^2_{\overline{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

$$z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

如此，我們就可以根據這個抽樣分配來判斷實際所得的「兩個樣本平均數之差異」來自所假設的「兩個母群體平均數之差異」的機率有多大，然後和先前所訂定的顯著水準比較，來決定是否拒絕虛無假設。

雙樣本平均數差異的單尾檢定

- 單尾檢定的虛無假設是「母體一的平均數沒有優於（或沒有劣於）母體二」。
- 右尾檢定的統計假設

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{cases}$$

- 左尾檢定的統計假設

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0 \end{cases}$$

雙樣本平均數差異的雙尾檢定

- 雙尾檢定的虛無假設是「母體一與母體二的平均數差異為0」。
- 當研究者並未有特定方向的設定（例如男生的智商與女生的智商有所不同），假設考驗在兩個極端的情況皆有可能發生，而必須設定兩個拒絕區。
- 雙尾檢定的統計假設

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$$

例：某大學欲了解大一新生男女智商有無差異，隨機抽取男生35名，女生49名，結果得男生平均智商為103，女生平均智商為108，已知該智力測驗母群體之標準差為15，試問男女智商有無顯著差異？

Step1：H_o ： $\mu_1 = \mu_2$ ， H_1 ： $\mu_1 \neq \mu_2$

Step2：因σ_1 和σ_2 已知，故採用z公式

Step3：α =.05，雙側考驗，臨界z為1.96和-1.96

Step4：觀察z值（-1.5062）＞-1.96，無法拒絕H_o

結論：男女大一新生的智商沒有差異。

例12-1：使用普通分類測驗測45名男生和40名女生，結果男生得$\overline{X}_1 = 89.60$，女生得$\overline{X}_2 = 85.25$。由該測驗常模查知男生的σ_{x1}=20.43，女生的σ_{x2}=19.54。問男女生該測驗平均數之差異是否達到 .05 顯著水準?

Step1：H_o ：$\mu_1 = \mu_2$ ，H_1 ：$\mu_1 \neq \mu_2$

Step2：因σ_1 和σ_2 已知，故採用z公式

$$z = \frac{(89.60 - 85.25) - 0}{\sqrt{\frac{(20.43)^2}{45} + \frac{(19.54)^2}{40}}} = 1.003$$

Step3：α =.05，雙側考驗，臨界z為1.96和-1.96

Step4：觀察z值（1.003）< 1.96，無法拒絕H_o

結論：男女生該測驗平均數沒有差異。

- **獨立樣本**

  當σ_1 和σ_2未知，小樣本時，且 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

  宜採用以下公式

$$t = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_P^2\left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right)}}$$

$$s_p^2 = \frac{(N_1 - 1)s_1^2 + (N_2 - 1)s_2^2}{N_1 + N_2 - 2} \qquad df = N_1 + N_2 - 2$$

兩個基本假設

- 處理兩個母群的問題時，須符合兩個基本假定：

1. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ ，即兩個母群的變異數要相同，稱為「變異同質性」。
2. 兩個樣本所來自的母群是常態分配。當兩個樣本人數增加時，$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)$ 之分配會漸趨近於常態分配，即可滿足常態性之需求。

例12-3：某心理學家宣稱RNA(核糖核酸)可以促進記憶力，因之有助於老鼠的迷津學習。他以隨機抽樣的方法抽取24隻老鼠，隨機分派為實驗組和控制組，每組12隻老鼠。實驗組注射RNA，控制組注射生理食鹽水，然後在同樣條件下進行迷津學習實驗。問是否可以說接受RNA注射的老鼠比注射生理食鹽水的老鼠學習成績為好的說法?

表 12-1 老鼠迷津學習正確反應的分數

實驗組	控制組
29	22
27	31
32	28
25	27
33	29
30	32
36	26
28	27
33	31
28	28
32	25
29	30
$\Sigma X_1=362$	$\Sigma X_2=336$
$\Sigma X_1^2=11026$	$\Sigma X_2^2=9498$
$\overline{X}_1=30.17$	$\overline{X}_2=28.00$

$$s_1^2=\frac{11026-\frac{(362)^2}{12}}{12-1}=9.61$$

$$s_2^2=\frac{9498-\frac{(336)^2}{12}}{12-1}=8.18$$

$$s_p^2=\frac{\left[11026-\frac{(362)^2}{12}\right]+\left[9498-\frac{(336)^2}{12}\right]}{12+12-2}$$

$$=8.89$$

$$t=\frac{30.17-28.00}{\sqrt{8.89\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\right)}}$$

$$=1.78$$

$$t_{1-\frac{30.17}{12}+\frac{1}{12}-2)}=2.508$$

Step1：H_o：$\mu_1 \leqq \mu_2$，H_1：$\mu_1 > \mu_2$

Step2：因σ_1 和σ_2 均未知，故必須使用不偏估計值。本題符合$\sigma_{x1}^2 = \sigma_{x2}^2 = \sigma^2$ 假設

Step3：本題使用$\alpha = .01$，s^2_{pooled}

查附錄表D，得$t_{1-.01,(12+12-2)} = 2.508$

Step4：實際計算得t=1.78 < 2.508，接受H_o

結論：本實驗所得結果，無法支持該實驗者所提RNA有助於學習的理論。

例題示範

某教授同時在兩個研究所教授高等統計課程，甲研究所有10名學生，乙研究所有8名學生，期末成績如下表，請問這兩個研究所的學生學習統計的成績是否有所差異？（$\alpha=0.05$）

甲班	85	82	90	90	75	88	87	85	78	82
乙班	82	75	80	80	85	85	75	80		

	個數	最小值	最大值	平均數	標準差	變異數
甲班	10	75	90	84.2	4.984	24.844
乙班	8	75	85	80.25	3.84522	14.786

雙尾檢定的統計假設 $\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$

樣本數小於30，假設$\sigma_1 = \sigma_2$，變異誤的估計量為$s_w^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(10-1)\times 24.844+(8-1)\times 14.786}{10+8-2} = 20.4436$，

$T = \frac{(\overline{X_1}-\overline{X_2})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_w^2}{n_1}+\frac{s_w^2}{n_2}}} = \frac{(84.2-80.25)-0}{\sqrt{\frac{20.4436}{10}+\frac{20.4436}{8}}} = 1.842$，又

查表得$t_{0.05}(10+8-2) = 2.12$，$1.842 < 2.12$，因此接受H_0，顯示兩個研究所的學生在高統的期末成績上並無明顯差異。此結論正確的機率達95%。

- 若兩個母體σ_1 和σ_2未知時，大樣本，則可採用t檢定，此時之t分配近似於z分配，故可查t分配表。

$$t = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{N_1} + \frac{s_2^2}{N_2}}} \approx z$$

- 當N_1 與N_2 相差較大時，違反變異同質性的情形會隨著差異愈大而愈來愈嚴重。相反的，若$N_1 = N_2$，即使N_1、 N_2較小，違反此假定的情形依然不構成威脅。
- 亦即，當$N_1 = N_2$時，不必太擔心是否違反變異同質性之假定。因此，t-test 被稱為是一種強韌的考驗工具（robust test）。

- 當違反變異同質性之假定時，即 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$時，則須採用Cochran & Cox所發展之t-test公式。

$$t' = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

分別根據兩組自由度查出臨界值，再經公式換算

$$t_0^{'} = \frac{t_1 s_{\overline{X}_1}^2 + t_2 s_{\overline{X}_2}^2}{s_{\overline{X}_1}^2 + s_{\overline{X}_2}^2}$$

t_1和t_2分別是N_1-1和N_2-1時的臨界值

例12-5 某高中甲乙兩班高三英文成績如下：

甲班 86, 82, 74, 85, 76, 79, 82, 83, 83, 79, 82

乙班 81, 77, 63, 75, 69, 86, 81, 60

是考驗甲乙兩班該科成績有無顯著差異。

甲班 $N_1=11$, $\Sigma X_1=891$, $\Sigma X_1^2=72305$

$\overline{x}_1=81.00$, $s_{X1}^2=13.4$, $s_{\overline{X}1}^2=1.22$

乙班 $N_2=8$, $\Sigma X_2=592$, $\Sigma X_2^2=44402$

$\overline{x}_2=74.00$, $s_{X2}^2=84.86$, $s_{\overline{X}2}^2=10.61$

Step1： H_o ： $\mu_1 = \mu_2$ ， H_1 ： $\mu_1 \neq \mu_2$

$\sigma_{x1}^2 \neq \sigma_{x2}^2$

$$t' = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{81.00 - 74.00}{\sqrt{\frac{13.40}{11} + \frac{84.86}{8}}} = 2.04$$

Step2： α =.05，雙側考驗，查附錄表D得

$t_1 = t_{.975,(11-1)} = 2.228$　$t_2 = t_{.975,(8-1)} = 2.365$

Step3： $\alpha = .05$

$$t_c' = \frac{t_1 s_{\bar{X}_1}^2 + t_2 s_{\bar{X}_2}^2}{s_{\bar{X}_1}^2 + s_{\bar{X}_2}^2} = \frac{(2.228)(1.22) + (2.365)(10.61)}{1.22 + 10.61} = 2.35$$

Step4： $t_o' = 2.04 < t_c' = 2.35$, 接受H_0

結論：甲乙兩班的英文平均並沒有顯著差異

例題示範

- 研究者想瞭解自己任教的甲、乙兩班成績是否有差異，成績如下表所示，試問兩班學生的成績是否有差異？（$\alpha = 0.01$）

	個數	最小值	最大值	平均數	標準差	變異數
甲班	27	12	91	55.74	23.927	572.507
乙班	27	7	88	52.96	23.285	542.191

假設$\sigma_1 \neq \sigma_2$ ，標準誤的估計量為

$$\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}=\sqrt{\frac{572.507}{27}+\frac{542.191}{27}}=6.42535$$

$$T=\frac{(55.74-52.96)-0}{6.42535}=0.432661$$

又r=51.96≒52，查表得$t_{0.01}(52)=2.67$，0.43<2.67，因此接受H_0，顯示甲乙兩班平均數差異未達顯著水準。此結論正確的機率達99%。

相依樣本之三個關鍵細節

（一）差異分數$(difference\ scores)$: $D = X_1 - X_2$

（二）虛無假設中，母群之差異分數的平均數為0。

（三）「差異分數的平均數次數分配」之變異數與標準差。

兩相依樣本之「差異分數的平均數次數分配」之變異誤
(variant error of the difference between the mean)

假設n是指受試者人數或配對的組數

則$\sigma^2_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = Var(\overline{X_1} - \overline{X_2})$

$= Var(\overline{X_1}) + Var(\overline{X_2}) - 2Cov(\overline{X_1}, \overline{X_2})$

$= Var(\overline{X_1}) + Var(\overline{X_2}) \ -2\,\rho \ \ \sigma_{\overline{X_1}}\sigma_{\overline{X_2}}$

$= \ \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n} \ -2\rho\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\frac{\sigma_2}{\sqrt{n}}$

$= \ \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

兩相依樣本之「差異分數的平均數次數分配」之變異誤
（ variant error of the difference between the mean）

$$\sigma^2_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$$

當母體標準差σ_1和σ_2未知時，此時標準誤需以樣本標準差S_1和S_2估計，則兩相依樣本之平均數差異的變異誤為

$$\sigma^2_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = \frac{s_1^2+s_2^2-2\rho s_1 s_2}{n}$$

兩相依樣本之「差異分數的平均數次數分配」之標準誤
（ standard error of the difference between the mean）

$$\sigma_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}}$$

當母體標準差σ_1和σ_2未知時，此時標準誤需 以樣本標準差s_1和s_2估計，則兩相依樣本之平均數差異的標準誤為

$$\sigma_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = \sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2 - 2\rho s_1 s_2}{n}}$$

兩相依樣本「差異分數的平均數」檢定統計量

先把受試者的前後兩個分數之差值($D = X_1 - X_2$)求出來，然後針對差異分數的抽樣分配進行估計，計算出統計檢定值，即可進行單一樣本平均數考驗，此一方法稱為直接差異分數檢定法，兩平均數差異的檢定統計量為T：

$$T = \frac{\bar{D}}{S_{\bar{D}}} = \frac{\bar{D}}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2}) - 0}{\sqrt{\frac{\sum D^2 - \frac{(\sum D)^2}{n}}{n(n-1)}}} \sim t(n-1)$$

此時的自由度為 $n-1$ 。

- **相依樣本**

回憶：

當 $r \neq 0$ $\quad s^2_{(X-Y)} = s^2_X + s^2_Y - 2rs_X s_Y$

當 $\rho \neq 0$ $\quad \sigma^2_{(X_1-X_2)} = \sigma^2_{X_1} + \sigma^2_{X_2} - 2\rho\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}$

所以，當σ未知且 $r \neq 0$

$$s^2_{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)} = s^2_{\overline{X}_1} + s^2_{\overline{X}_2} - 2rs_{\overline{X}_1} s_{\overline{X}_2}$$

$$t = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right)}{\sqrt{s^2_{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right)}}} = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right)}{\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2 - 2rs_1s_2}{N}}}$$

$$t = \frac{\bar{d} - 0}{s_{\bar{d}}} = \frac{\bar{d} - 0}{\frac{s_d}{\sqrt{N}}} = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right)}{\sqrt{\frac{\sum d^2 - \frac{\left(\sum d\right)^2}{N}}{N(N-1)}}}$$

df=N-1

例12-6 某研究者利用12名兒童來接受創造力訓練課程。下表示接受訓練課程以前創造力測驗前測成績和接受訓練課程以後的後測成績。試以$\alpha = .01$，考驗研究者所說「創造力訓練課程可以提高創造力」的說法是否為真。

Step1：H_0：$\mu_1 \geqq \mu_2$，H_1：$\mu_1 < \mu_2$

Step2：兩個母群的σ^2未知，故採用相依樣本t考驗公式。 df=N-1 =12-1=11

Step3：α =.01，單側考驗，查附錄表D得

$t_{.01,(12-1)} = -2.718$

$$t = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}{\sqrt{\frac{\sum d^2 - \frac{(\sum d)^2}{N}}{N(N-1)}}} = \frac{(9.75 - 11.5)}{\sqrt{\frac{71 - \frac{(21)^2}{12}}{12(12-1)}}} = -3.44^{**}$$

Step4：t=-3.44 < $t_{.01}$= -2.718 , 拒絕H_0

結論：創造力測驗後測平均比前測平均為高。創造力訓練課程可以提高兒童的創造力之說法可以得到支持

表 12-2　十二名兒童創造力測驗前後測平均成績差異考驗

學生	X_{i1} 前測	X_{i2} 後測	d_i
A	10	12	−2
B	8	7	1
C	11	14	−3
D	9	13	−4
E	6	9	−3
F	15	16	−1
G	10	12	−2
H	13	12	1
I	9	10	−1
J	11	14	−3
K	8	8	0
L	7	11	−4
和	117	138	−21
平方和	1211	1664	71
乘積和	1402		
相關	.7682		
平均	9.75	11.50	−1.75
標準差	2.5271	2.6458	1.7645

〔公式 12-11〕

$$t=\frac{(9.75-11.50)-.00}{\sqrt{\frac{(2.5271)^2+(2.6458)^2-2(.7682)(2.5271)(2.6458)}{12}}}$$

$$=-3.44^{**}$$

〔公式 12-12〕

$$t=\frac{-1.75-0}{\frac{1.7645}{\sqrt{12}}}$$

$$=\frac{(9.75-11.50)-0}{\sqrt{\frac{71-\frac{(-21)^2}{12}}{12(12-1)}}}$$

$$=-3.44^{**}$$

$$t_{.01(12-1)}=-2.718$$

例題示範

- 14位小朋友各分別採取2種不同方法走迷宮，其花費之時間如下表所示，試問兩種方法所花的時間是否有差異？（$\alpha = 0.05$）

	個數	最小值	最大值	平均數	標準差	變異數
方法一	14	3.8	11	6.9357	2.12118	4.499
方法二	14	3.5	7.9	5.1214	1.19433	1.426

$\bar{D} = 1.8143$， $S_D = 2.7021$，$T = \frac{\bar{D}}{S_{\bar{D}}} = \frac{1.8143}{\frac{2.7021}{\sqrt{14}}} = 2.5123$，又查表得 $t_{0.05}(14-1) = 2.16$，$2.5123 > 2.16$，因此拒絕H_0，即兩種方法所花的時間是有顯著差異存在。此結論正確的機率達95%。

例題示範

〈 *Method. 1* 〉8名學生分別在安靜和噪音的情況下，記錄其答錯題目的次數，請問噪音對於學生答錯題目是否有顯著差異？（$\alpha = 0.05$）

$$s_{\overline{X_1}-\overline{X_2}} = 0.25$$

$$t_{obt} = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2}) - \mu_0}{s_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}}$$

$$= \frac{(3-4.25)-0}{0.25} = -5$$

因為$t(7)_{.05,2tail} = \pm 2.365$

所以$-5 < -2.365$

因此拒絕H_0，有顯著差異

噪音對於考試答錯題數的研究數據

編號	安靜組	噪音組
1	4	5
2	6	6
3	3	5
4	3	4
5	1	3
6	3	4
7	2	3
8	2	4
平均數	3.00	4.25
變異數	2.28	1.08
標準差	1.51	1.04

例題示範

〈 *Method. 2* 〉8名學生分別在安靜和噪音的情況下，記錄其答錯題目的次數，請問噪音對於學生答錯題目是否有顯著差異？（$\alpha = 0.05$）

$$S_{\bar{D}}^2 = \frac{S_D^2}{n} = \frac{.5}{8} = .063$$

$$\therefore t_{obt} = \frac{\bar{D} - \mu_0}{\sqrt{S_{\bar{D}}^2}} = -5$$

因為$t(7)_{.05,2tail} = \pm 2.365$

所以$-5 < -2.365$

拒絕H_0，有顯著差異

編號	安靜組	噪音組	差異分數
1	4	5	-1
2	6	6	0
3	3	5	-2
4	3	4	-1
5	1	3	-2
6	3	4	-1
7	2	3	-1
8	2	4	-2
平均數	3.00	4.25	-1.25
變異數	2.28	1.08	.500
標準差	1.51	1.04	.707

兩個變異數的差異顯著性考驗

- S_{X1}^2和S_{X2}^2相差太大，$N_1 \neq N_2$

- 獨立樣本

例12-7 某國三數學教師想知道男生或女生數學程度比較整齊。下面是他利用雖隨機抽樣所抽得的11名男生和8名女生的國三數學成績：

男生：86, 82, 74, 85, 76, 79, 82, 83, 83, 79, 82 （S_{X1}^2=13.40）

女生：81, 77, 63, 75, 69, 86, 81, 60（S_{X2}^2=84.86）

問男生與女生國三數學成績的分散情形是否一樣?

Step1 H_o ： $\sigma_{X1}^2 = \sigma_{X2}^2$ ， H_1 ： $\sigma_{X1}^2 \neq \sigma_{X2}^2$

Step2 假定男生(μ_{X1}, σ_{X1})、女生(μ_{X2}, σ_{X2})的數學成績為常態分配，現從男生的母群中抽取大小為N_1 的樣本，從女生母群中抽取大小為N_2的樣本，得到s_{X1}^2 和 s_{X2}^2，以s_{X1}^2/s_{X2}^2比較兩者間的差異

$$F = \frac{s^2_{X1}}{s^2_{X2}}$$

Step3 $\alpha = .05$

$F_{\alpha/2,(N1-1,N2-1)}$, $F_{1-(\alpha/2),(N1-1,N2-1)}$

$\Rightarrow F_{.05/2(10,7)} = 0.25$, $F_{1-(.05/2)(10,7)} = 4.76$

Step4

$$F = \frac{s^2_{X1}}{s^2_{X2}} = \frac{13.40}{84.86} = 0.16$$

拒絕H_0，男生國三數學成績的參差情形與女生國三數學成績的參差情形並不一樣

- 相依樣本

$$t = \frac{\left(s^2_{X1} - s^2_{X2}\right)}{\sqrt{4s^2_{X1}s^2_{X2}\,\frac{(1-r^2)}{N-2}}}$$

- 自由度 N-2

例12-8 一位小學教師隨機抽取學童62名，在三年級和六年級先後舉行兩次算術科成就測驗。測驗結果，三年級時s_{X1}^2=122.56，六年級時的s_{X2}^2=163.89，先後兩次測驗 r= .59。

問六年級時學童的算術科成績是否較三年級時為參差不齊?

Step1　H_o ： $\sigma_{X1}^2 \geqq \sigma_{X2}^2$ ， H_1 ： $\sigma_{X1}^2 < \sigma_{X2}^2$

Step2　$\alpha = .05$ ， 查表 $t_{.05,(62-2)} = -1.671$

Step3

$$t = \frac{(122.56 - 163.89)}{\sqrt{4(122.56)(163.89)\dfrac{1-(.59)^2}{62-2}}} = -1.40$$

接受H_0，即六年級時學童的算術科成績並未較三年級時為參差不齊

兩個百分比的差異顯著性考驗

- 獨立樣本

$$z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{pq\left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right)}}$$

→ 是p1-p2 抽樣分配的變異誤

$P_1 = f_1/N_1$ 是第一個樣本某反應之百分比

$P_2 = f_2/N_2$ 是第一個樣本某反應之百分比

$P=(f_1+f_2)/(N_1+N_2)$ 是全部受試者某反應之百分比

$q=1-p$

- 例12-11 某研究者想調查城市的高中生和鄉下的高中男女合校之意見有否差異，乃自成是隨機抽取500名高中生和自鄉下隨機抽取300名高中生進行問卷調查。結果城市的受試者之中有326名表示贊成男女合校，鄉下的受試者之中有176名表示贊成。問城市與鄉下高中生贊成男女合校者之百分比有否顯著差異?

- H0：P1=P2=P

	城市	鄉下	
贊成	326	176	502
反對	174	124	298
	500	300	800

P_1 =326/500 = .6520 ，P_2 =176/300 = .5867

P=(326+176)/(500+300)= .6275

q=1-.6275 ， pq= .2337

$$z = \frac{.6520 - .5876}{\sqrt{(.6520)(.5876)\left(\frac{1}{500} + \frac{1}{300}\right)}} = 1.08$$

- $\alpha = .05$　查附錄表A

  $Z_{.025} = -1.96$　$Z_{.975} = 1.96$，故接受H_0

由本調查顯示城市與鄉下高中生對男女合校的意見方面並無顯著差異存在

- 相依樣本(重複量數)

$$z = \frac{p_{1\cdot} - p_{\cdot 2}}{\sqrt{\frac{p_{11} + p_{22}}{N}}} = \frac{A - D}{\sqrt{A + D}}$$

例12-12 50名高二學生在學期初和學期末均被問喜歡不喜歡英文課，結果喜歡與不喜歡的百分比如表12-3所示。試考驗學期前後，喜歡英文課之學生百分比有無差異?

表 12-3　五十名學生學期前後愛好英文課人數百分比之改變

基本形式

a	b	p_1
c	d	q_1
q_2	p_2	

觀察百分比

（學期末）

（學期前）	不喜歡	喜歡	
喜　歡	.12	.30	.42
不喜歡	.22	.36	.58
	.34	.66	1.00

Ho: $P_1=P_2$

$$z=\frac{.42-.66}{\sqrt{\frac{.12+.36}{50}}}=-2.4495^*$$

$z_{.025}=-1.96$

故學期前後，喜歡英文課之學生百分比的確有所不同

例題示範

- 假定你想實驗「默讀」與「朗讀」對語文理解測驗成績的影響。又假定現在60名學生可以參加你的實驗。此時，你如何設計，就叫做受試者間設計（獨立樣本）?如何設計，就叫做受試者內設計（相依樣本）?這兩種設計各需如何安排這60名學生?

- 下面是參加自我肯定訓練課程的十位實驗組學生與參加一般課程的十位控制組學生在課程結束後的自我肯定測驗分數。試考驗兩組的平均數是否有顯著差異?

  實驗組：12、14、10、7、13、12、10、9、10、 8

  控制組： 8、 7、12、9、 5、10、11、7、 9、10

例題示範

- 某研究者利用「受試者內設計」進行實驗。下面是前測與後測的平均數、標準差，和前後測的相關係數：

  前測：　$\bar{X}1=69.28$　　$s1=5.13$

  後測：　$\bar{X}2=72.34$　　$s2=6.25$

- 試以$\alpha=.05$，考驗「後測成績高於前測成績」的說法能否成立?

- 試考驗下列資料合不合乎「變異數同質性」的基本假定：

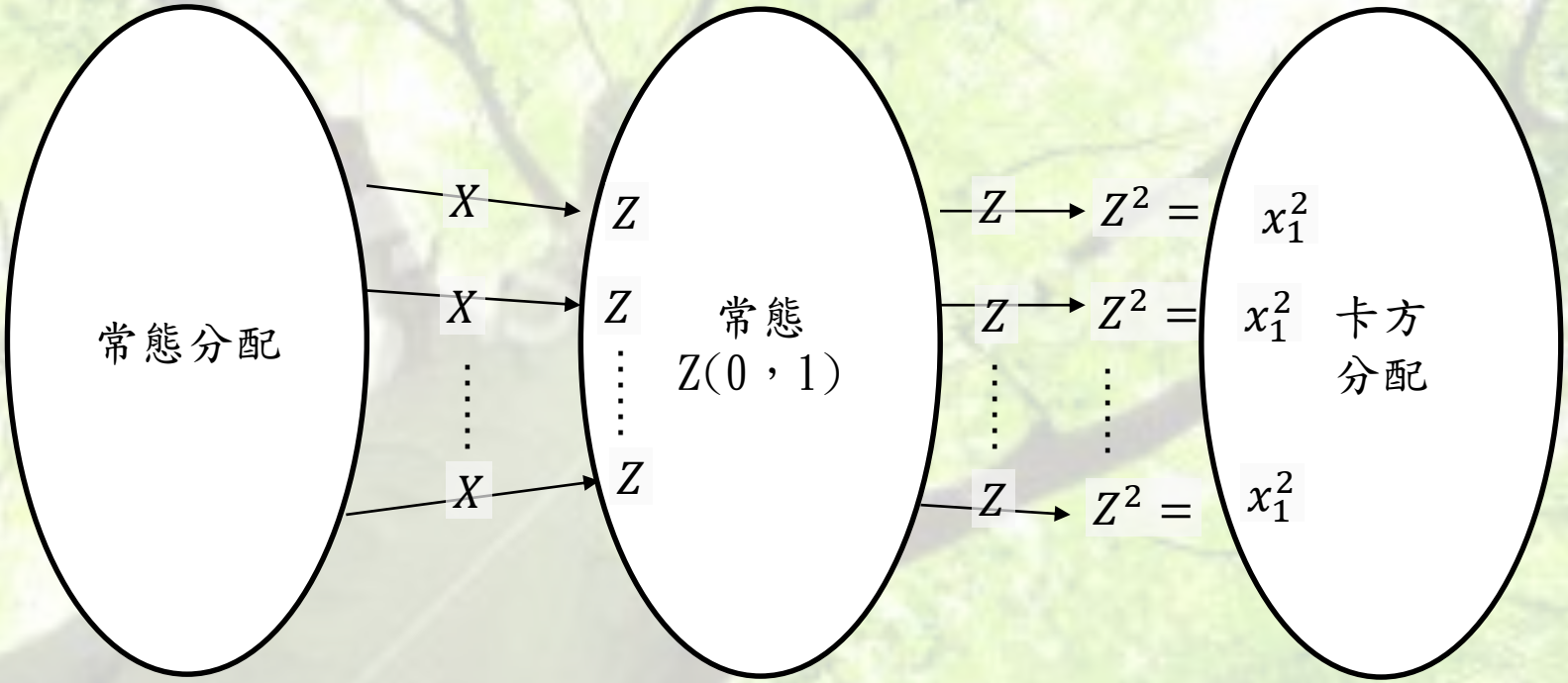
  實驗組：　$N1=11$　　$s1=9.14$

  控制組：　$N2=16$　　$s2=10.35$

第十三章
卡方考驗

- 卡方考驗是於處理間斷變項，目的在描述某一個變項下，不同類別的分佈情形（例如人數、次數或學歷：1是碩博士、2是大學畢業、3是高中及以下），在調查研究法中最常用到。
- 變項的數值是間斷的非連續數字，變項的次數分配並不明確，需使用無母數考驗的型態，針對各類別的次數來進行統計考驗(又稱為次數考驗)

卡方分配的定義和性質



卡方分配的定義和性質

- 現在假定我們自一個常態分配中每一次隨機抽取一個分數X，並用公式$z=\frac{X-\mu}{\sigma}$，將其轉換為z分數。如此重複進行無限多次，則最後將得一個平均數為0，標準差為1的常態分配。其次，再讓我們從這一個z分數的常態分配中，隨機抽取一個z分數然後加以平方，並將此一平方後的z分數命名為x_1^2，如此重複無限多次，則我們便可以得到無限多個x_1^2。

卡方分配的性質

- 以上所得為df=1 之卡方分配，此時

$$\chi_1^2 = z^2 = \left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^2$$

（1）因為 $z^2 = \chi_1^2$，所以 χ_1^2 沒有負值。

（2）成高狹峰分配

- 若每次抽取兩個X，則

$$\chi_2^2 = \left(\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) + \left(\frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right) = z_1^2 + z_2^2$$

- 若自由度增為n，則

$$\chi_n^2 = z_1^2 + z_2^2 + ... + z_n^2 = \sum_{i=1}^{n} z^2$$

其中 χ^2 讀作 kai square

＊卡方分配的性質如下（朱經明，民79）：

1. 所有的卡方值均為正值
2. 每一種自由度，就有一條卡方分配曲線
3. 自由度為df的卡方分配，其平均數為 df，標準差為 $\sqrt{2df}$
4. 自由度大於2時，眾數之值等於自由度減2。
5. 為正偏分配，當自由度越大時，就越接近常態分配。
6. 卡方曲線的面積為 1，為一機率分配
7. $$\sum\left(\frac{X-\overline{X}}{\sigma}\right)^2=\sum\frac{(X-\overline{X})^2}{\sigma^2}=\frac{\sum(X-\overline{X})^2}{\sigma^2}=\frac{SS}{\sigma^2}=\frac{(N-1)s^2}{\sigma^2}$$

，相當於自由度為 N-1 之卡方分配

8. 卡方值具有可加性

- 在df=1的卡方分配中，PR=68的χ^2值等於1

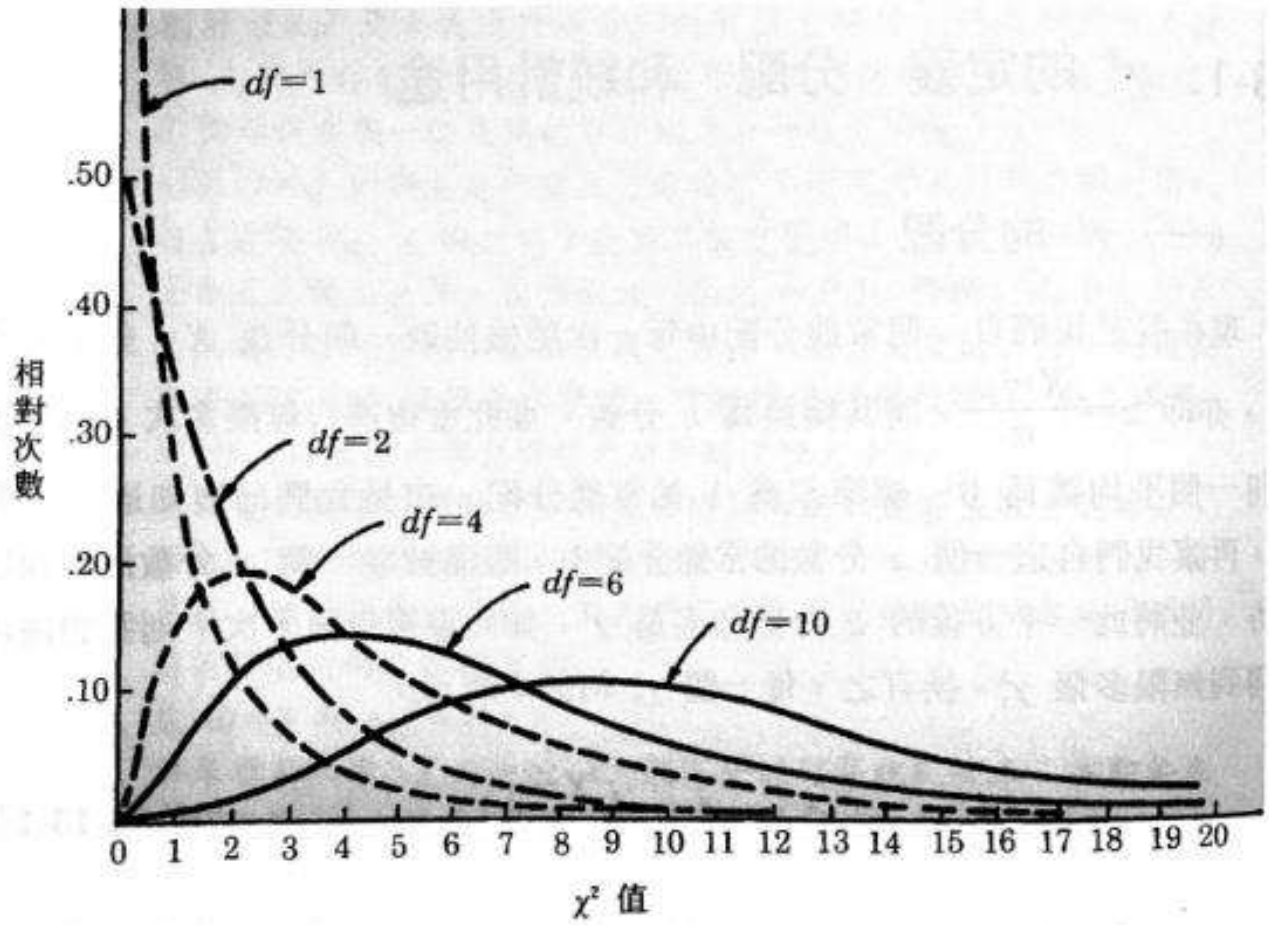


圖 13-1　不同自由度之 χ^2 的次數分配

卡方考驗的定義公式

- 卡方考驗的定義公式

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$$ 【公式1】

- *fo*
  - 代表觀察次數（observed frequencies）
- *fe*
  - 代表期望次數（expected frequencies）
  - 依據理論分配所計算出來
- 殘差（residual）　（*fo-fe*）
  - f_0與f_e兩者的差值
-

卡方考驗的定義公式

- 卡方考驗為樣本在類別變項上的次數分配是否與某個理論分配或母群分配相符合，一旦卡方值大於臨界值，即可獲得顯著的統計結論。

- 若實際調查的人數與根據理論推估出來的人數相差愈大，則χ^2也愈大。卡方考驗通常只用於雙側考驗，（1）由查表得知，α=.05時，$z^2 = \chi_1^2 \quad (1.96)^2 = 3.841$，（2） α=.01之單側考驗時，須以 $\chi^2_{.98(n)}$ 為臨界值。

四大用途之1-適合度檢定

- 適合度檢定是透過比較「觀察次數」與「理論次數」是否一致，來確定虛無假設的分配是否適合觀察次數。

例13-1 某兒童心理學家想研究不同色調的色紙對幼兒的吸引力是否不同。他呈現紅橙黃綠藍靛紫等七種色紙供280名幼兒選擇對喜歡的一種，結果如表13-2所示。問幼兒對不同色調的色紙喜歡的情形是否有所不同?

表 13-2　二百八十名幼兒選擇色紙的 χ^2 考驗

色彩	f_o	f_e	(f_o-f_e)	$(f_o-f_e)^2$	$(f_o-f_e)^2/f_e$
紅	52	40	12	144	3.600
橙	48	40	8	64	1.600
黃	44	40	4	16	.400
綠	31	40	−9	81	2.025
藍	29	40	−11	121	3.025
靛	30	40	−10	100	2.500
紫	46	40	6	36	.900
	280	280	0		14.05

- 若「幼兒對七種色調的喜歡程度相同」這說法成立，則每種色調被選擇的理論次數(f_e)應該都是40

1)Ho:幼兒對七種色調的喜歡程度相同

H_1:幼兒對七種色調的喜歡程度不相同

2)

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$$

(3)

$$\chi^2_{.95(6)} = 12.592$$

4)實際觀察發現：

$$\chi^2 = \frac{(52-40)^2}{40} + \frac{(48-40)^2}{40} + \frac{(44-40)^2}{40} + \frac{(31-40)^2}{40}$$

$$+ \frac{(29-40)^2}{40} + \frac{(30-40)^2}{40} + \frac{(46-40)^2}{40} = 14.05^*$$

$14.05 > 12.592$，∴拒絕虛無假設，亦即幼兒對七種色調的喜歡程度不相同，由觀察次數可發現，幼兒偏好暖色系(紅、橙)，較不喜歡冷色系(藍、靛)

3-1 某高中校長宣稱該校歷年考進文、法、理、工、和醫院比例為1:3:2:4:2。今年大學入學考結果，該校360名考上述各學院之人數分配如下表所示。問該校長的話是否仍用於今年的情形?

表 三百六十名考生考入各學院的人數之χ^2考驗

	f_o	f_e	$(f_o - f_e)$	$(f_o - f_e)^2$	$(f_o - f_e)^2/f_e$
文學院	51	30	21	441	14.700
法學院	78	90	-12	144	1.600
理學院	61	60	1	1	.017
工學院	103	120	-17	289	2.408
醫學院	67	60	7	49	.817
	360	360	0		19.542

Ho:觀察次數與理論次數間沒有差異

H_1:觀察次數與理論次數間有差異

實際觀察發現：

$$\chi^2 = \frac{(51-30)^2}{30} + \frac{(78-90)^2}{90} + \frac{(61-60)^2}{60} + \frac{(103-120)^2}{120} + \frac{(67-60)^2}{60} = 19.542$$

$\because 19.542 > \chi_{.99(4)}^2 = 13.277$ ， $\therefore$應拒絕虛無假設，即今年各學院入學人數比例與過往相同

四大用途之2-百分比同質性檢定

- 旨在考驗J個群體在I個反應方面的百分比是否一樣，亦即這些群體的反應是否為同質。

例13-4 某國中學生輔導室調查42名國一學生、46名國二學生、和37名國三學生「有」或「無」閱讀過武俠小說的經驗。試考驗三個年級學生閱讀過武俠小說的人數百分比是否相同?

除定義公式外，還可使用以下的這個公式

$$\chi^2 = N(\sum\sum \frac{f_{ij}^2}{f_i \times f_j} - 1)$$ 【公式2】

$$df=(J-1)(I-1)$$

個公式可得到同樣的值，但這個公式較簡便。

觀 察 次 數

	國一	國二	國三	
有	27	34	28	89
無	15	12	9	36
n_i	42	46	37	125
p_i	.6429	.7391	.7568	.7120

期 望 次 數

	國一	國二	國三	
有	29.904	32.752	26.344	89
無	12.096	13.248	10.656	36
	42	46	37	125

（公式 13-3）

$$\chi^2=\frac{(27-29.904)^2}{29.904}+\frac{(34-32.752)^2}{32.752}+\frac{(28-26.344)^2}{26.344}$$
$$+\frac{(15-12.096)^2}{12.096}+\frac{(12-13.248)^2}{13.248}+\frac{(9-10.656)^2}{10.656}=1.51^{\text{n.s.}}$$

（公式 13-6）

$$\chi^2=125\left[\frac{27^2}{89\times42}+\frac{34^2}{89\times46}+\frac{28^2}{89\times37}+\frac{15^2}{36\times42}+\frac{12^2}{36\times46}+\frac{9^2}{36\times37}-1\right]$$
$$=1.51^{\text{n.s.}}$$

$df=(I-1)(J-1)=(2-1)(3-1)=2$ $\qquad$ $\chi^2_{.95(2)}=5.991$

$H_0 : P_1 = P_2 = P_3 = \mathrm{P}$

$H_1 : H_0$為假(至少有兩組答「有」的%不相同)

$$\hat{P} = \frac{f11 + f12 + f13}{n.1 + n.2 + n.3} = \frac{27 + 34 + 28}{42 + 46 + 37} = \frac{89}{125} = .7120$$

接著計算題目中的期望次數：

- 國一：$42 \times .7120 = \frac{42 \times 89}{125} = 29.904$
- 國二：$46 \times .7120 = \frac{46 \times 89}{125} = 32.752$
- 國三：$37 \times .7120 = \frac{37 \times 89}{125} = 26.344$

- df= (I-1)(J-1)= (2-1)(3-1)=2

  α =. 05 ，$\chi_{.95(2)}^{2} = 5.991$

- ∵ $\chi^2 = 1.51 < 5.991$，故接受Ho，

  即國一、國二、國三這三個群體閱讀武俠小說的百分比相同
- 若χ^2達到顯著水準，則須進行事後比較

- 百分比同質性檢定達顯著後，可以用同時信賴區間的方式進行事後比較，它可使全部的事後比較犯第一類型錯誤的總概率不大於進行 χ^2 考驗時所訂的 α 值(例如 α =.05)。

$$\varphi = (p_j - p_{j'}) \pm \sqrt{\chi^2_{(1-\alpha)(I-1)(J-1)}} \sqrt{\frac{p_j q_j}{n_j} + \frac{p_{j'} q_{j'}}{n_{j'}}}$$

- 若所求得之**同時信賴區間包括0在內，則表示該兩個百分比之差異不顯著**，亦即，應接受$H_0: P_j = P_{j'}$。相反的，若該區間不包括0在內，則表示該兩個百分比之間有顯著差異。

例13-5 某研究者調查31位、43位教師、20位心理專家、和91位學生有關懲罰的意見。表13-6是四組受試者對該項目的反應之觀察次數：

1.「成績退步的學生應該受到老師的懲罰」

□贊成 □沒意見 □反對

試考驗這四組受試者對此項目的贊成百分比是否相同？

	家長	教師	心理專家	學生	
贊　成	23	27	5	31	86
沒意見	5	4	6	10	25
反　對	3	12	9	50	74
n_j	31	43	20	91	185
p_j	.742	.628	.250	.341	.465

（公式 13-6）

$$\chi^2 = 185\left[\frac{23^2}{86\times 31}+\frac{27^2}{86\times 43}+\cdots\cdots+\frac{50^2}{74\times 91}-1\right]=31.66^*$$

$$\chi^2_{.95,(3-1)(4-1)}=\chi^2_{.95,(6)}=12.592$$

（公式 13-8）

家長—教師 $\psi_1=(.742-.628)\pm\sqrt{12.592}\sqrt{\frac{(.742)(.258)}{31}+\frac{(.628)(.372)}{43}}$

$=.114\pm.382$ (n.s)

家長—專家 $\psi_2=(.742-.250)\pm\sqrt{12.592}\sqrt{\frac{(.742)(.258)}{31}+\frac{(.250)(.750)}{20}}$

$=.492\pm.443$ ($P<.05$)

家長—學生 $\psi_3=.401\pm.330$ ($P<.05$)

教師—專家 $\psi_4=(.628-.250)\pm\sqrt{12.592}\sqrt{\frac{(.628)(.372)}{43}+\frac{(.250)(.750)}{20}}$

$=.378\pm.432$ (n.s)

教師—學生 $\psi_5=.287\pm.315$ (n.s)

專家—學生 $\psi_6=-.091\pm.386$ (n.s)

以 家長與教師的比較來說

其中 $\Psi_1 = .114 \pm .382$ ，即 $-.268 < \Psi 1 < .496$

因為此信賴區間包含0在內，故這對百分比之差異並未達顯著。即家長贊成的百分比(p_1)與教師贊成的百分比(p_2)實際上並沒有差異可言，兩組相差11.4%只是機遇造成的。

以 家長與心理專家的比較來說

其中 $\Psi 2 = .492 \pm .443$ ，即$-.049 < \Psi 1 < .935$

因為此信賴區間內不包含0在內，故這對百分比之差異達顯著。即家長贊成的百分比(p_1)與心理專家贊成的百分比(p_3)實際上有差異，家長贊成的百分比較心理專家高。

四大用途之3-獨立性考驗

- 獨立性考驗旨在考驗兩個自變項是否互為獨立；如果不互為獨立事件，則繼續進行關聯性考驗，以了解兩者之關聯的性質和程度。
- 2X2列聯表時，用公式3較方便。其他形式的列聯表，用公式2較方便。其自由度均為df=(J-1)(I-1)。

例13-6 某研究者利用100名學童為受試者，每人都接受左右腦側化測驗和手臂左右利測驗，結果如表13-7所示。試考驗腦側化和左右利兩者之間是否獨立無關？

1. Ho: Pij =Pi ・Pj
   H1: Ho為假

以P_{11}為例計算期望次數，

P_{11}= (18/100)(29/100) = .0522

故 N=100 右腦型且左手利者的兒童應有

100 * .0522=5.22 個人

〔基本形式〕

A	B	(A+B)
C	D	(C+D)
(A+C)	(B+D)	

〔觀察次數〕

	左手利	右手利	
右腦型	12 (5.22)	6 (12.78)	18
左腦型	17 (23.78)	65 (58.22)	82
	29	71	100

（括弧內爲理論次數）

（公式 13-9）

$$\chi^2=\frac{100(12\times65-6\times17)^2}{18\times82\times29\times71}=15.13^{**}$$

（公式 13-3）

$$\chi^2=\frac{(12-5.22)^2}{5.22}+\frac{(6-12.78)^2}{12.78}+\frac{(17-23.78)^2}{23.78}+\frac{(65-58.22)^2}{58.22}=15.13^{**}$$

（公式 13-10）

$$\phi=\sqrt{\frac{15.13}{100}}=.39$$

df=(2-1)(2-1)=1 ， $^{**}\chi^2_{.99(1)}=6.635$

3. 自由度

df= (I-1)(J-1)= (2-1)(2-1)=1

α=.01

$$\chi^2_{.99(1)} = 6.635$$

4. $\chi^2 = 15.13 > 6.635$ ，拒絕虛無假設

即「腦側化」與「左右利」並非互為獨立，亦即兩者之間有相關存在

5. χ^2考驗之結果顯示「腦側化」與「左右利」並非互為獨立，可繼續探討兩者的關連性程度與性質

- 與卡方值有關的關聯指標

＊ϕ相關：適用於兩個變項皆為「真正二分」類別變項。2×2

$$\phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{N}}$$

＊列聯相關：適用於兩個變項皆為「多分類別變項」。3×3或3 ×3以上

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{N + \chi^2}}$$

＊克瑞瑪Vc係數（Cramer's V）：用於行數不等於列數時。

$$Vc = \sqrt{\frac{\phi^2}{\min(I-1, J-1)}}$$

表　社經地位、教育程度的獨立性考驗及V_c值的算法

（社經水準）

（教育程度）	低	中	高	
大學	6	17	20	43
高中	15	26	24	65
國中	31	34	13	78
小學	42	45	10	97
	94	122	67	283

$$\chi^2=283\left[\frac{6^2}{43\times94}+\frac{17^2}{43\times122}+\cdots\cdots+\frac{10^2}{97\times67}-1\right]$$

$$=34.5328^*$$

$$\phi^2=\frac{\chi^2}{N}=\frac{34.5328}{283}=.1220$$

$$V_c=\sqrt{\frac{.1220}{\min(4-1,3-1)}}=\sqrt{\frac{.1220}{2}}=.247$$

$$\lambda=\frac{(42+45+24)-97}{283-97}=.075$$　（從社經水準預測教育程度）

$$\chi^2_{.95(6)}=12.592$$

預測關聯性指標

$$\lambda=\frac{\sum \max f_{ij}-\max f_{i\cdot}}{N-\max f_{i\cdot}}$$

四大用途之4-改變的顯著性考驗

- 旨在檢定同一群受試者在同一個變項的前後兩次反應是否有所不同，相當於「重複量數」的設計。
- 麥內瑪檢定(McNemar test)：適用於2x2的交叉列聯表時，可使用定義公式或

$$\chi^2 = \frac{(A-D)^2}{A+D}$$

$$z = \frac{p_{1\cdot} - p_{\cdot 2}}{\sqrt{\frac{p_{11}+p_{22}}{N}}} = \frac{A-D}{\sqrt{A+D}}$$

例13-7 80位國二學生在學期初和學期末被問喜不喜歡英文課，其反應結果之統計如表13-9所示，問學期前後學生喜歡不喜歡英文的情形有無顯著改變?

2 X 2 交叉表　　重複量數(同一群學生)

以A表示那些由喜歡變為不喜歡者，以D代表那些由不喜歡變為喜歡者，則態度改變者一共有(A+D)個人

Ho: A= D

- 理論上應有(A+D)/2 個人由喜歡變為不喜歡，也有(A+D)/2 個人由不喜歡變為喜歡
- 根據定義公式

$$\chi^2 = \frac{(A - \frac{A+D}{2})^2}{\frac{A+D}{2}} + \frac{(D - \frac{A+D}{2})^2}{\frac{A+D}{2}} = \frac{(A-D)^2}{A+D}$$

- $\chi^2 = 3.5714 < \chi_{.95(1)}^2 = 3.841$

接受Ho: A=D, 即喜歡變為不喜歡人數與由不喜歡變為喜歡的人數並無不同

表 13-9　八十名學生學期前後對英文課之態度的改變

〔基本形式〕

A	B
C	D

p_{11}	p_{12}	$p_{1\cdot}$
p_{21}	p_{22}	$p_{2\cdot}$
$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	1.00

〔次數資料〕

（學期末）

（學期初）	不喜歡	喜歡	
喜歡	9	28	37
不喜歡	24	19	43
	33	47	80

$$\chi^2=\frac{(9-19)^2}{9+19}=3.5714$$

（公式 13-14）

〔百分比資料〕

（學期末）

（學期初）	不喜歡	喜歡	
喜歡	.1125	.3500	.4625
不喜歡	.3000	.2375	.5375
	.4125	.5875	1.00

$$z=\frac{.4625-.5875}{\sqrt{\frac{.1125+.2375}{80}}}=-1.8898$$

或 $$z=\frac{9-19}{\sqrt{9+19}}=-1.8898$$

（公式 12-21）

（公式 13-15）

$\chi^2_{.95(1)}=3.841$　　$z_{.025}=-1.96$

卡方考驗的其它注意事項

（一）卡方值具有可加性；若有兩個卡方分配彼此獨立，自由度分別為*v1*、*v2*，則兩者相加，變成自由(*v1*+*v2*)之卡方值。

（二）限制：適用於大樣本，各細格期望次數最好大於5，當細格相當多時，至少要有80%的細格的期望次數大於5。

（三）卡方考驗的校正：卡方考驗基本上適用於觀察數值相當多時，如果細格的期望次數小於5且df=1時，就必須進行「Yate's correction for continuity」。因為卡方分配是連續型的機率分配，而人數與次數則是間斷型的資料形態，所以在所觀察的資料較少時，應用連續分配就會產生誤差過大的情況，因而必須進行校正。

例題示範

1. 試用卡方的定義公式、運算公式計算下列資料，並核對結果是否相同。（α=.05）

	國中	高中	合計
男校長	65	15	80
女校長	35	35	70
合計	100	50	150

2. 研究者想研究「校長性別」與「學校類別」是否有關連性存在。調查結果如上表（第一題的數據）。試以四個步驟進行假設考驗，然後求ϕ相關和解釋結果。（α=.05）

例題示範

3. 小學、中學、大學共150名學生通過某項體能測驗的人數如下表所示：

	小學	中學	大學	合計
通過	7	40	47	94
不通過	31	5	20	56
合計	38	45	67	150

試以四個步驟考驗三種學生通過測驗的百分比是否相同？如不同，請進行事後比較。（α=.05）

例題示範

4. 利用內外控信念量表先後相隔一年對80名學生重複測量兩次，結果如下表所示。試問這些學生的內外控信念是否有明顯改變？（α=.05）

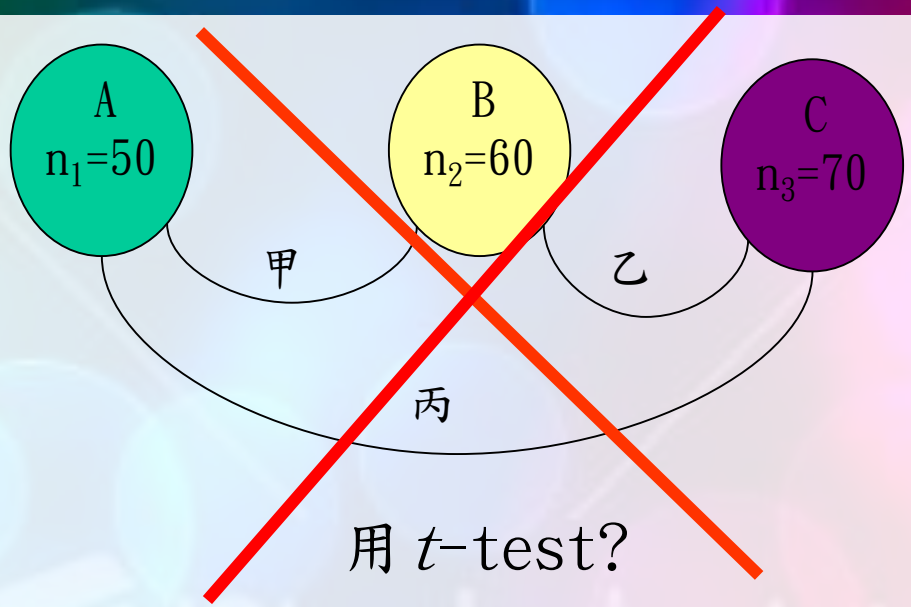
		一年後		
		內控	外控	合計
一年前	外控	9	28	37
	內控	24	19	43
	合計	33	47	80

5. 在接受訪問的92位男生之中69名對目前的職業感到滿意，43名女生之中有33名感到滿意。問此項資料能否支持「男女生對職業滿意度之百分比有所不同」的說法？（α=.01）

第十四章
獨立樣本單因子變異數分析

- 變異數分析(analysis of variance，簡稱為 ANOVA)是因應實驗設計所發展出來的統計方法，適用於三組或三組以上平均數之差異顯著性考驗（兩組亦可用），也就是探討類別變項對於連續變項的影響。各組平均數間的變異稱為「組間變異」，各組內分數的變異就稱為「組內變異」，變異數分析就是在檢定組間變異數和組內變異數之比例，以確定實驗操弄是否有效，或是各組平均數間是否有顯著差異存在。
- 超過兩個以上的平均數的考驗，其原理是運用**F考驗**來檢驗平均數間的變異量是否顯著的高於隨機變異量，又稱為變異數分析

- 單因子乃指只有一個自變項的情況。
- 獨立樣本是指自變項是受試者間變項。



- 在比較多組母體的平均值時，我們通常不採用兩兩比較(t-test)的方式，主要的原因有：

1. 這種做法太浪費時間，因為比較幾個母體可能產生很多的比較組，例如比較五個母體的平均值差異，如果以兩兩比較的方式，我們必須進行C^5_2=10次的t-test。
2. 如果每組的顯著水準皆為α，則全體比較的顯著水準會高於α。

變異數分析的基本假設

- 常態性假設
- 變異數同質性假設
- 獨立性假設
- 可加性假設
- 球面性假設（sphericity）

常態性（normality）假設

- 變異數分析需處理超過三個以上的平均數，須假設樣本是抽取自常態分配的母群體，當樣本數越大，常態化的假設越不易違反。
- 簡單來說，要比較不同組的差異，長得奇形怪狀的來比當然比不出什麼東西，所以要用常態來比才有意義。

變異數同質性假設

- 多個樣本平均數的比較，必須建立在樣本的其他參數保持恆定的基礎上，也就是各樣本必須取自變異量相等的母群體。如果樣本的變異數不同質，將造成推論上的偏誤。此即樣本變異數同質性假設（homogeneity of variance）。

獨立性假設

- 抽樣一定是要獨立的，所以你要分析資料當然是要足夠公正，不能說你想要刻意去挑想要的。利用簡單隨機抽樣出來的樣本，其母體也會是常態分配的。

可加性假設

- 變異數分析牽涉到變異量的拆解，因此，各種變異來源的變異量須相互獨立，且可以進行累積與加減，稱為可加性（additivity）假設。在進行加總時，係使用離均差平方和，而非變異數本身。
- $SS_t = SS_b + SS_w$，$df_t = df_b + df_w$ 。

球面性假設（sphericity）

- 適用於相依樣本的變異數分析，係指不同水準的同一組樣本，在依變項上的得分，兩兩配對相減所得的差的變異數必須相等（同質）。也就是說，不同的受試者在不同水準間配對或重複測量，其變動情形應具有一致性。

變異數分析的基本假設

- 變異數分析是一個強韌(robust)的檢定方法，特別是在大樣本及等組設計（各組在各方面的特質都相等或相似，且人數相等）時。強韌性的意思是，即使違反基本假設，對第一類型錯誤的機率或統計考驗力的影響並不明顯。

ANOVA適用的實驗設計

- 獨立樣本：或稱為「受試者間設計」或「完全隨機化設計」 ，乃是將N個受試者隨機分派到k個不同的組別，分別接受不同的實驗處理。
- 相依樣本：或稱為「受試者內設計」或「隨機化區組設計」。有三種情況：重複量數(一組受試者重複接受3種以上的實驗處理)、配對組法(以影響依變項最大的變項，如IQ，進行配對)、同胎法(3胞胎分別接受3種實驗處理)。

ANOVA之基本概念-1

- 基本概念

1. t-test是對兩個母群的平均數作差異顯著性考驗，ANOVA是對三個或三個以上的母群的平均數作差異顯著性考驗。

2. $s^2 = \frac{\sum(X - \bar{X})^2}{N-1}$ 是母群變異數的不偏估計數。

在此處稱為**均方**（mean square，MS）

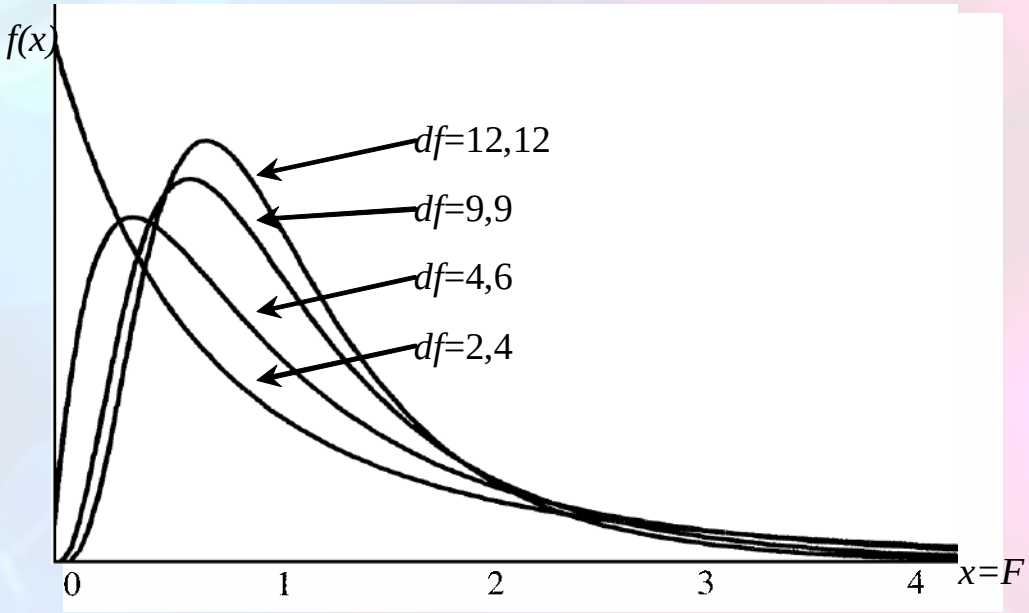
ANOVA之基本概念-2

3. 以$F = \frac{S_b^2}{S_w^2}$表之，組間變異數（S_b^2，MS_b）為實驗處理效果項，組內變異數（S_w^2，MS_w）為誤差項。若MS_b比MS_w還要大很多倍，且大到不是機遇(chance)造成的，此時就可宣稱組間的變異顯著，亦即，各組平均數之間有顯著差異存在。

- 兩個變異數的比值稱為F統計量

$$F = \frac{\hat{\sigma}_b^2}{\hat{\sigma}_w^2} = \frac{MS_b}{MS_w} = \frac{SS_b/df_b}{SS_w/df_w}$$

- F統計量的機率分配為F分配
  - F值越大，表示研究者關心的組平均數的分散情形較誤差變異來得大
  - 若大於臨界值，研究者即可獲得拒絕H0的結論



組內變異與組間變異

- 組內變異 within-treatment variance

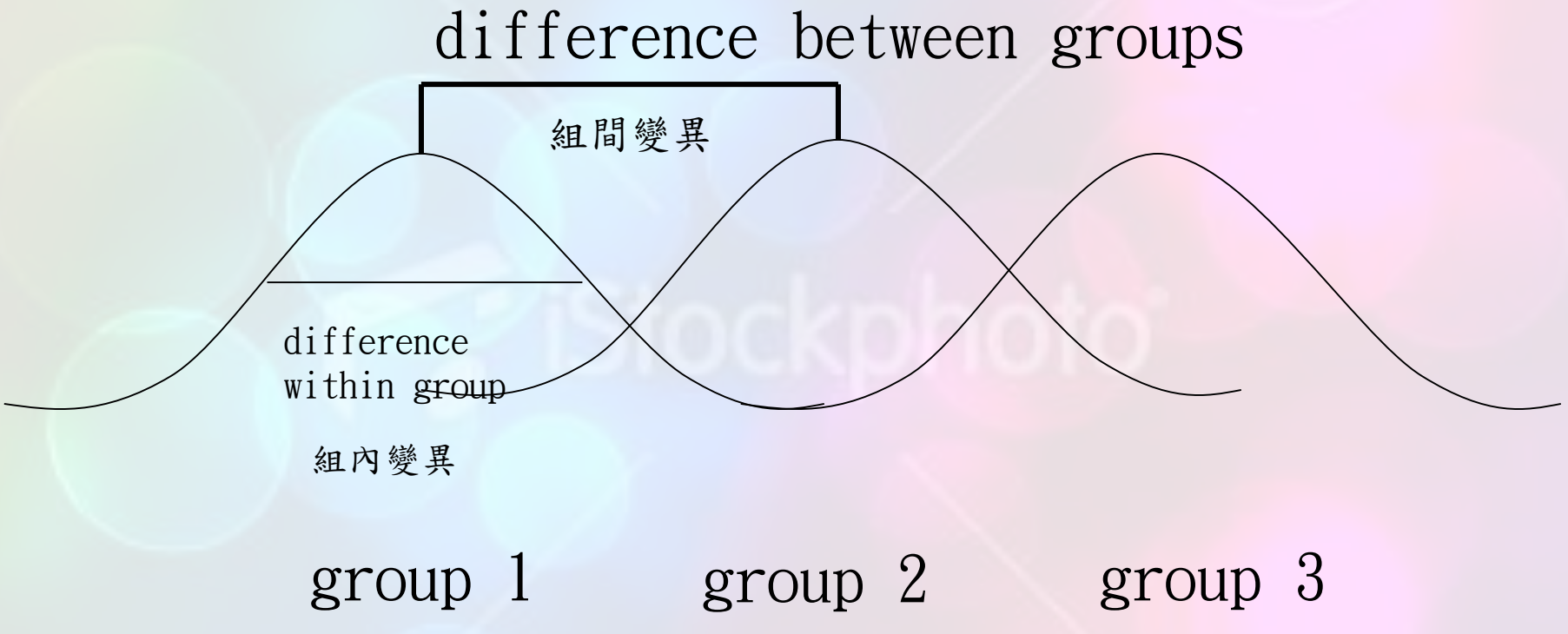
  各種樣本本身所估計出來的變異數

  - 互動教學法、死背教學法和實驗教學法各自的變異數

- 組間變異 between-treatment variance

  各組分數之間的變異情形

  - 互動教學法、死背教學法和實驗教學法之間的變異情形，因教學法不同而造成的差異


difference between groups
組間變異
difference
within group
組內變異
group 1
group 2
group 3

ANOVA可使用的情境

- 比較文學院，理學院，教育學院學生對學生餐廳滿意度是否一樣?

→不同學院的學生對學生餐廳的滿意度是否有顯著差異?

- 比較教師、醫師、律師對連鎖咖啡廳的忠誠度是否有一樣?

→不同職業的消費者對連鎖咖啡廳的忠誠度是否有顯著差異?

- 檢定多個(3or3以上)母體平均數是否相同

一般線性模式

單因子變異數分析的通式

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_j + e_{ij}$$

- μ為總平均數（grand mean）
  全體觀測值的平均值
  表示母體中的任何一位樣本的依變項初始狀態是相同的。
- αj表獨變項效果
  獨變項的第j組對於依變項的效果，強度為$\mu j - \mu$，（第j組的離均差）
  對於第j組當中每一位受試者，αj為一常數，各組離均差總和為0
- ε為誤差效果
  為常態隨機變數，記為$N(0, \quad)$。
  同一個組別下的每一位受試者在Y變項上產生差異的隨機效果

- 老師用三種不同教學方法教統計，學生統計分數是否因教法不同而有顯著差異
  - 教學方式（互動、死背、實驗）
  - 分數

- 儒瑜的分數概念模型

儒瑜分數=μ總平均數+α_j獨變項效果+ ε 誤差效果

碩一+碩二

教學方式差異(互動、死背、實驗)

隨機誤差(個體差異、實驗技術誤差)

$$SS_{total} = SS_{between} + SS_{within}$$

- SStotal:依變項觀察值的變異。全體樣本在依變項得分的變異情形，即總離均差平方和
- SSb「導因於獨變項影響的變異」（組間離均差平方和，sum of squares between groups）
- SSw「導因於獨變項以外的變異」（隨機變異）（組內離均差平方和，sum of squares within groups）

- 各離均差平方和平均化後，得到均方和（MS），即為變異數的概念

$$SS_{total} = \sum\sum (Y_{ij} - \bar{Y}_G)^2 \qquad MS_{total} = \frac{SS_{total}}{df_{total}} = \frac{\sum\sum (Y_{ij} - \bar{Y}_G)^2}{N-1} = s^2_{total} = \hat{\sigma}^2_{total}$$

$$SS_b = \sum_{j=1}^{p} n_j (\bar{Y}_j - \bar{Y}_G)^2 \qquad MS_b = \frac{SS_b}{df_b} = \frac{\sum n_j (\bar{Y}_j - \bar{Y}_G)^2}{p-1} = s^2_b = \hat{\sigma}^2_b$$

$$SS_w = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} (Y_{ij} - \bar{Y}_j)^2 \qquad MS_w = \frac{SS_w}{df_w} = \frac{\sum\sum (Y_{ij} - \bar{Y}_j)^2}{n(p-1)} = s^2_w = \hat{\sigma}^2_w$$

直線線性模式、計算過程與F考驗

1. 線性模式（linear model）：

$$X_{ij} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \cdots, n, \; j = 1, \cdots, k$$

實驗處理之效果　誤差

$\bar{X}_{..}$（總平均數）為 μ 的不偏估計數

$(\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..})$（主要效果）為 $\beta_j = \mu_j - \mu$ 的 〃 〃 〃

$(X_{ij} - \bar{X}_{.j})$（誤　差）為 ε_{ij} 的 〃 〃 〃

△ ε_{ij}：是「實驗或測驗誤差」和「個別差異」所共同造成.

ε_{ij} 的基本假定：(1) ε_{ij} 之分配為常態. 平均數為0.

(2) 各 ε_{ij} 之間互為獨立.

$$X_{ij} = \bar{X}_{..} + (\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..}) + (X_{ij} - \bar{X}_{.j})$$

$$(X_{ij} - \bar{X}_{..}) = (\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..}) + (X_{ij} - \bar{X}_{.j})$$

2.

若求第 j 组的 n 个分数的离差平方和，即为

$$\sum_{i=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X}_{..})^2 = n(\overline{X}_{.j}-\overline{X}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X}_{.j})^2$$

再把 k 组的总和加起来，则为

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X}_{..})^2 = n\sum_{j=1}^{k}(\overline{X}_{.j}-\overline{X}_{..})^2 + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X}_{.j})^2$$

$$SS_t = SS_b + SS_\omega$$

总离均差平方和　　组间离差平方和　　组内离差平方和

$$SS_t = \underbrace{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} X^2}_{②} - \underbrace{\frac{(\Sigma\Sigma X)^2}{kn}}_{①}, \quad df_t = kn-1$$

$$SS_b = \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \frac{\sum_{i=1}^{n} X^2}{n}}_{③} - \underbrace{\frac{(\Sigma\Sigma X)^2}{kn}}_{①}, \quad df_b = k-1$$

$$SS_w = \underbrace{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} X^2}_{②} - \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \frac{\sum_{i=1}^{n} X^2}{n}}_{③}, \quad df_w = k(n-1)$$

$$MS_t = \frac{SS_t}{df_t}, \quad MS_b = \frac{SS_b}{df_b}, \quad MS_w = \frac{SS_w}{df_w}$$

模式、計算過程與F考驗

変異数分析摘要表.

変異来源(SV)	離均差平方和(SS)	自由度(df)	均方(MS)	F
組間(between)	SS_b	$k-1$	MS_b	MS_b/MS_w
組内(within)	SS_w	$k(n-1)$	MS_w	
全体(total)	SS_t	$N-1$		

臨界值 $F_{1-\alpha}(k-1, k(n-1))$

變異數分析摘要表

變異來源	*SS*	*Df*	*MS*	*F*	η^2
組間	SS_b	*p-1*	SS_b/df_b	MS_b/MS_w	SS_b/SS_{total}
組內(誤差)	SS_w	*n(p-1)*	SS_w/df_w		
全體	SS_{total}	*N-1*			

$p(n-1)=N-p$

F考驗

$$F = \frac{s_b^2}{s_w^2} = \frac{MS_b}{MS_w}$$

- 若F=0，表示各組平均數完全相等，此時總變異完全由實驗誤差所造成，須接受H_o 。
  若F=1，表示實驗處理的變異未超過機遇所造成的變異，所以須接受H_o。
  若F>>1且落入拒絕區，則拒絕H_o。達顯著水準後，應進行事後比較。

- 當組別 k=2時，$F=t^2$。須注意$SS_t = SS_b + SS_w$，
  $df_t = df_b + df_w$ ，但$MS_t \neq MS_b + MS_w$

關聯強度

- 統計顯著性（statistical significance）
  - 基於機率理論的觀點，說明獨變項效果相對於隨機變化的一種統計意義的檢驗
  - *例如利用F考*驗來決定獨變項效果的統計意義
- 實務顯著性（practical significance）
  - 反應獨變項效果在真實世界的強度意義
  - 常用ω^2 、 η^2、f量數表示
  - 也稱為臨床顯著性（clinical significance）

關聯強度

- 若F值達顯著水準，則表示自變項與依變項有關聯性存在，可以下列公式來表示其關聯強度：

$$\hat{\omega}^2 = \frac{SS_b - (k-1)MS_w}{SS_t + MS_w} = \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2 + \sigma_\varepsilon^2}$$

$\hat{\omega}^2$ (omega squared)旨在說明實驗處理可以解釋依變項之總變中的百分之多少。如果可解釋之百分比太少，即使達顯著，亦無實質意義。

- ω^2量數的特性
  - 數值介於0到1之間，越接近1表示關聯越強
  - ω^2量數值分佈為以.05到.06為眾數的正偏態分配，達到.1以上者，即屬於高強度的獨變項效果
  - 一般期刊上所發表的實證論文的ω^2量數，也僅多在.06左右
- Cohen（1988）建議下列的判斷準則

$.059 > \omega^2 \geq .01$ 低度關聯強度

$.138 > \omega^2 \geq .059$ 中度關聯強度

$\omega^2 \geq .138$ 高度關聯強度

獨立樣本單因子變異數分析

（受試者間設計；各組人數相同）

例14-1 某研究者想了解國小六年級自然科四種教學方法對學生自然科成績的影響，乃以隨機分派的方式將學生分派到演講法、自學輔導法、啟發式教學法、和編序教學法等四種教學情境。這些國小六年級學生參加一年的實驗後，自然科成就測驗成績如14-1所示。問四種教學方法的教學效果是否有所不同？

表 14-1　四種教學方法教學結果的變異數分析

	演講	自學	啓發	編序	
	4	5	9	7	
	3	7	8	9	
	5	4	9	5	
	7	6	6	8	
	6	5	8	7	
ΣX	25	27	40	36	$\Sigma\Sigma X=128$
ΣX^2	135	151	326	268	$\Sigma\Sigma X^2=880$
$\overline{X}_{.j}$	5.0	5.4	8.0	7.2	$\overline{X}_{..}=6.4$

〔計算代號〕

$\frac{(\Sigma\Sigma X)^2}{nk}$ $\quad ①=\frac{(G)^2}{nk}=\frac{(128)^2}{5\times4}=819.2$

$②=\Sigma\Sigma X^2=4^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+8^2+7^2=880$

$\sum_k \frac{\sum_n X^2}{n}$ $\quad ③=\frac{\Sigma(A)^2}{n}=\frac{(25)^2+(27)^2+(40)^2+(36)^2}{5}=850$

〔計算公式〕

$$SS_t=880-\frac{(128)^2}{20}=②-①=60.8$$

$$SS_w=\left[135-\frac{(25)^2}{5}\right]+\left[151-\frac{(27)^2}{5}\right]+\left[326-\frac{(40)^2}{5}\right]+\left[268-\frac{(36)^2}{5}\right]$$

$$=880-\frac{(25)^2+(27)^2+(40)^2+(36)^2}{5}=②-③=30.0$$

$$SS_b=\frac{(25)^2+(27)^2+(40)^2+(36)^2}{5}-\frac{(128)^2}{20}=③-①=30.8$$

獨立樣本之one-way ANOVA

表 14-2　四種教學方法實驗結果的變異數分析摘要表

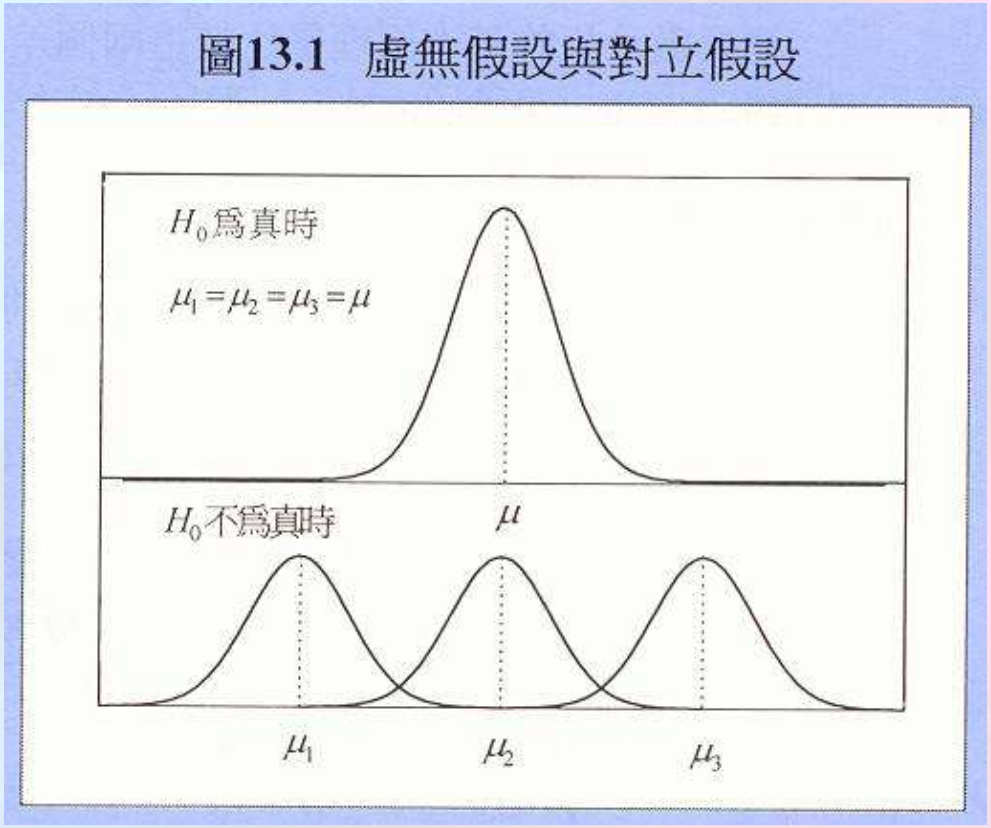
變異來源	離均差平方和	自由度	均　方	F
組間（教學方法）	30.8	3	10.267	5.48*
組內（誤差）	30.0	16	1.875	
全　體	60.8	19		

*$F_{.95(3,16)}=3.24$

獨立樣本之one-way ANOVA

- Step1 ：

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 \\ H_1 : H_0 \text{為假}(\mu_i \text{不全等}) \end{cases}$$



獨立樣本之one-way ANOVA

- Step2 :獨立樣本之one-way ANOVA ，公式如P.318-319。
- Step3 : α =.05， $F_{.95(3,16)} = 3.24$
- Step4 :計算並建構變異數分析摘要表。

  ∵5.48＞3.24，∴拒絕Ho，即四種教學法的效果有顯著差異，應進行事後比較，以確定哪些組之間的平均數有差異。

- 當Ho為真： $\mu_1=\mu_2=\mu_3$

組間變異數與組內變異數均只受到各母群內的變異情形影響。

組間變異數與組內變異數的估計值應該大約相等，比值會接近於1:1。

$$\text{變異比 } F = \frac{\text{組間變異數}}{\text{組內變異數}} \text{ 接近於1}$$

- 當H1為真：μ_i不全等

組間變異數受到兩個因素所影響。

1. 每個母群內的變異情形
2. 不同母群間的變異情形

組內變異數仍只受到各母群內的變異情形影響。

此時組間變異數的估計值會大於組內變異數的估計值，比值會大於1。

$$\text{變異比 } F = \frac{\text{組間變異數}}{\text{組內變異數}} \quad \text{大於1}$$

若變異比遠大於1時，則可拒絕虛無假設(查表)

獨立樣本單因子變異數分析

（受試者間設計；各組人數不同）

例14-2 某心理學家想研究「知道學習結果與否對學習成績的影響」。她請受試者戴眼罩畫十公分直線。每當受試者畫完一直線之後，告訴「精確回饋組」的話是「長1.2公分」、「短半公分」等；告訴「粗略回饋組」的話是「太長」、「太短」等；對「零回饋組」則不告訴任何話。實驗結果各組每位受試者之平均錯誤量如表14-3所示。問各組的學習結果是否有明顯差異？

表 14-3　不同回饋方式對學習的影響

	精確回饋	粗略回饋	零 回 饋	
	0.5	0.9	1.0	
	1.2	1.3	1.4	
	0.9	0.7	1.6	
	0.7	1.6	0.8	
	1.4	1.5	0.9	
	1.0	0.7	1.8	
	0.8	1.8		
		0.9		
		1.2		
ΣX	6.5	10.6	7.5	$\Sigma\Sigma X = 24.6$
ΣX^2	6.59	13.78	10.21	$\Sigma\Sigma X^2 = 30.58$
n	7	9	6	$N = 22$
$\overline{X}$	0.93	1.18	1.25	$\overline{\overline{X}} = 1.12$

$$SS_t = 30.58 - \frac{(24.6)^2}{22} = 3.073$$

$$SS_b = \frac{(6.5)^2}{7} + \frac{(10.6)^2}{9} + \frac{(7.5)^2}{6} - \frac{(24.6)^2}{22} = 0.38$$

$$SS_w = 3.073 - 0.388 = 2.685$$

SV	SS	df	MS	F
組間（回饋方式）	0.388	2	0.194	1.38
組內（誤差）	2.685	19	0.141	
全體	3.073	21		

$$F_{.95(2,19)} = 3.52$$

- 如果一個實驗所得的結果，愈能正確推論到實驗以外的情境去，這實驗的「**外部效果**」(external validity)就愈高。
- 假如一個實驗裡面所有的實驗處理水準就包含了它將來所要推論的全部處理水準，也就是當一個研究的自變項的水準個數（k組），包括了該變項所有可能的水準數（K組），也就是樣本的水準數等於母體的水準數（K=k），就叫做「**固定效果模式**」(fixed effect model)。
  - 如例14-1的推論結果僅限定於實驗者所設定的四種教學方法，無法推論到其他教學法，此即為固定效果模式。
  - 比較大學四個年級學生的曠課次數，此時自變項為年級，具有四個水準，而母體亦為四個年級。

- 若實驗者自許許多多處理水準中隨機取幾種作為其實驗處理水準，而此實驗結果將可推論到這許許多多的處理水準情境，即研究所取用的自變項，只包含特定的一些水準，而並非包括所有可能的類別，即樣本的水準數小於母體的水準數（K>k），則稱「**隨機效果模式**」(random-effect model)。
  - 例如教育學者比較不同地區的學校教學方法的成效有所不同，因此隨機選取幾個地區的一些學校共四所（自變項），該研究所關心的四個水準，可以說是隨機自教學方法的母體中，隨機取用得來的。

效果量係數

- 效果量（size of effect）係數

  用來衡量獨變項強度的統計量。

- *D*量數

  $$D = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_\varepsilon}$$

  最簡單的效果量

  指平均數之間的差異程度，平均數間差異越大，表示獨變項的強度越強

檢定力（power）

- 一個研究可以正確拒絕錯誤虛無假設的能力，以1-β來表示
  - 例：一個實驗，有兩組人，一組用 A 藥，一組用安慰劑 (也就是控制組)。A 藥是事實上真實有效的，在這個例子中，power就是發現這兩組不同的機率。舉數字來說，如果power是 .8 ，而且這個實驗作了無數次。power是 .8 的解讀就是：80% 的機率，我們會發現兩組之間的差異。從另外一方面來說，20% 的機率我們不會發現兩組之間的差異，雖然兩組確實存在差異的。

檢定力分析（power analysis）

- Power反應了一個研究的實務顯著性，太低的檢定力表示研究的數據可參考價值低。
- 對於檢定Power進行分析可檢視統計考驗的敏銳度，據以推算合理的樣本規模。
- 作檢定力分析的好處就是決定樣本數。

實驗、族系與比較錯誤率

- 實驗誤差率（experiment-wise error rate；EWE）

  統計的決策，是以整個實驗的型I錯誤率維持一定（例如.05）的情況下，導出各次決策所犯的型I錯誤率為何
- 族系誤差率（familywise error rate; FWE）

  將每一個被檢驗的效果（例如主要效果、交互效果）的統計考驗的型I錯誤率維持一定，導出各次決策所犯的型I錯誤率
- 比較錯誤率（comparison-wise error rate）

  將型I錯誤率設定於每一次的統計考驗，均有相同的犯第一類型錯誤的機率
- 實驗與族系誤差率

  為了維持整體的α水準為.05，必須降低各次考驗的α水準

$$\alpha_{FW} = 1-(1-\alpha)^{j}$$

進行比較的次數

$$\alpha_{FW} = 1-(1-\alpha)^{j}$$

為單一考驗的 α 水準

- 如果一個實驗需進行10次多重比較，整個族系的顯著水準要維持在0.05，單一比較的顯著 α 水準

$$0.05 = 1-(1-\alpha)^{10} \Rightarrow \alpha = 0.0051$$

- 快速算法：將族系α_{FW}水準直接除以比較次數j

$$\alpha = \alpha_{FW}/j = 0.05/10 = 0.005$$

F與t的比較：只有兩組數據時

- 變異數分析通常用於比較三組或三組以上平均數差異的情況，但也可以用來處理只有兩組的問題(即，t檢定的問題也可以用F統計來解決)

例14-3 某研究者想知道漢字直寫與橫寫是否在速度方面有所差異。表14-5是兩組各10名學生每個人在單位時間內所寫成的平均字數。問直寫與橫寫的速度是否不同？

表 14-5　兩組時 F 考驗和 t 考驗的比較

	平均字數										ΣX	ΣX^2
直寫	12	14	10	7	13	12	10	9	10	8	105	1147
橫寫	8	7	12	9	5	10	11	7	9	10	88	814
全體											**193**	**1961**

（一）t 考驗：

$$s_P^2 = \frac{\left[1147-\frac{(105)^2}{10}\right]+\left[814-\frac{(88)^2}{10}\right]}{10+10-2} = \frac{84.10}{20-2} = 4.6722$$

$$t = \frac{10.5-8.8}{\sqrt{4.6722\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right)}} = 1.7586$$

（二）F 考驗：

$$SS_t = 1961-\frac{(193)^2}{20} = 98.55$$

$$SS_w = \left[1147-\frac{(105)^2}{10}\right]+\left[814-\frac{(88)^2}{10}\right] = 84.10$$

$$SS_b = 98.55-84.10 = 14.45$$

$$F = \frac{14.45/(2-1)}{84.10/(20-2)} = \frac{14.45}{4.6722} = 3.0927$$

因此
當k=2時 $F=t^2$

$t_{1-\frac{.05}{2},(10+10-2)}=2.101$　　$F_{1-.05,(2-1,20-2)}=4.41$

單因子相依樣本設計的資料形式

- **細格效果**
  - 每一個細格只有一個觀察值，因此沒有細格內變異，沒有交互效果
  - 細格間的變異視為隨機誤差
- **獨變項分組平均數**
  - 表示實驗或分組效果（*p*個獨變項各水準下的分組平均數）
- **區組平均數（橫列上區組平均數）**
  - 反應該區組的平均水準，也就是區組同質性所造成在依變項上的水準高低

	獨變項 A				Block mean (between subjects)
	a_1	a_2	..	a_p	
Block 1	Y_{11}	Y_{12}	..	Y_{1p}	$\bar{Y}_{1.}$
Block 2	Y_{21}	Y_{22}	..	Y_{2p}	$\bar{Y}_{2.}$
:	:	:	..	:	
Block *n*	Y_{n1}	Y_{n2}	..	Y_{np}	$Y_{n.}$
mean of A	$\bar{Y}_{.1}$	$\bar{Y}_{.2}$		$\bar{Y}_{.p}$	$\bar{Y}_G$

細格效果

區組效果

NEW

獨變項效果

比較：獨立樣本

36個大學生參加運動實驗，這些學生隨機分配到輕度、中度、重度運動量的三個組別，一個月後收集該36位學生某一天晚上的睡眠時間

表 9.1 運動對睡眠影響研究數據

	輕度運動量組		中度運動量組		重度運動量組		全體
觀察值	6.5	7.1	7.4	7.4	8.0	8.2	
	7.3	7.9	6.8	8.1	7.7	8.5	
	6.6	8.2	6.7	8.2	7.1	9.5	
	7.4	7.7	7.3	8.0	7.6	8.7	
	7.2	7.5	7.6	7.6	6.6	9.6	
	6.8	7.6	7.4	8.0	7.2	9.4	
n	12		12		12		36
$\sum Y$	87.8		90.5		98.1		276.4
$\sum Y^2$	645.3		685.07		812.81		2143.18
$\bar{Y}$	7.32		7.54		8.18		7.68

細格效果

獨變項效果

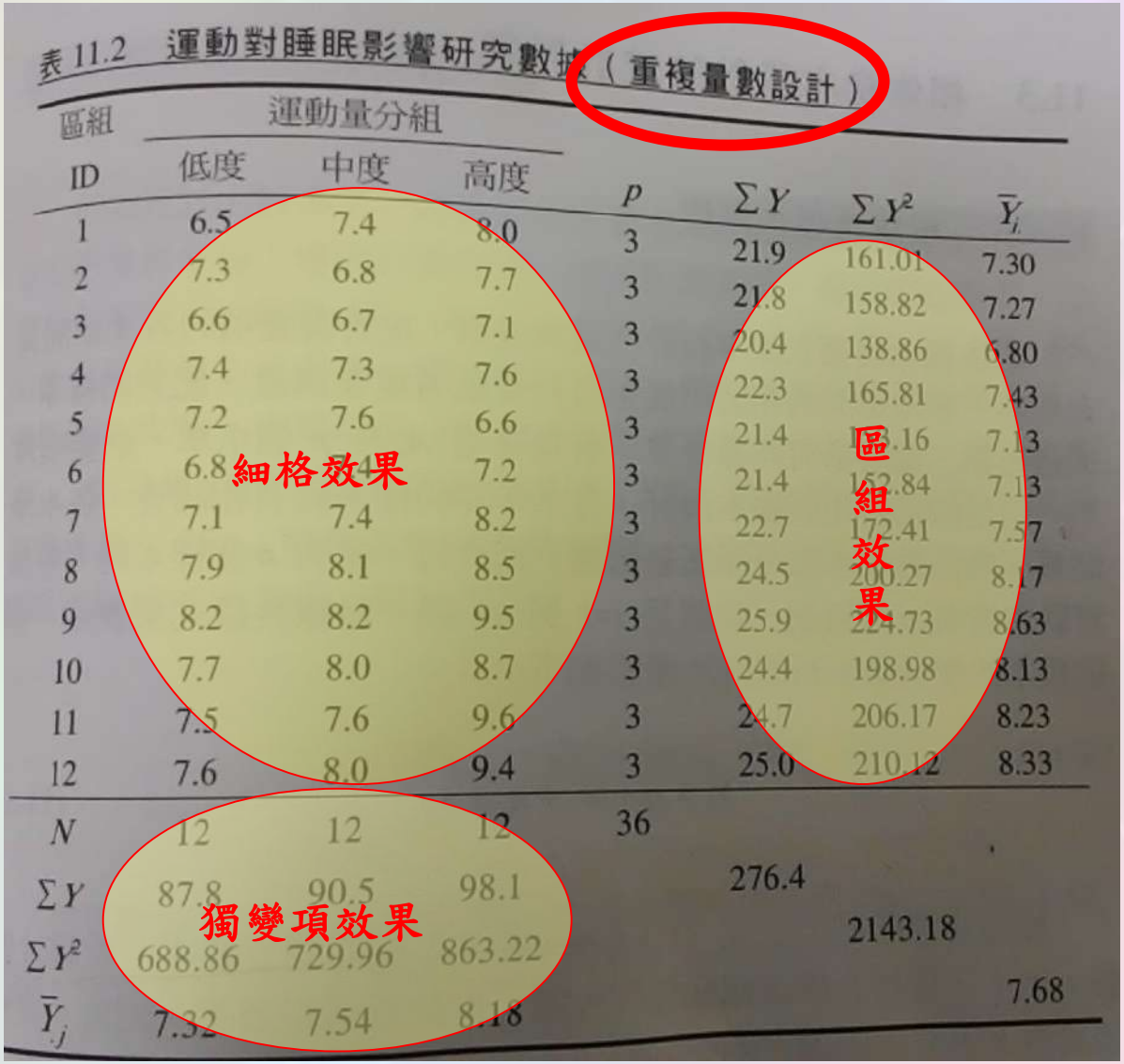


表 11.2 運動對睡眠影響研究數據（重複量數設計）

區組	運動量分組						
ID	低度	中度	高度	p	$\sum Y$	$\sum Y^2$	$\bar{Y}_i$
1	6.5	7.4	8.0	3	21.9	161.01	7.30
2	7.3	6.8	7.7	3	21.8	158.82	7.27
3	6.6	6.7	7.1	3	20.4	138.86	6.80
4	7.4	7.3	7.6	3	22.3	165.81	7.43
5	7.2	7.6	6.6	3	21.4	153.16	7.13
6	6.8	7.4	7.2	3	21.4	152.84	7.13
7	7.1	7.4	8.2	3	22.7	172.41	7.57
8	7.9	8.1	8.5	3	24.5	200.27	8.17
9	8.2	8.2	9.5	3	25.9	224.73	8.63
10	7.7	8.0	8.7	3	24.4	198.98	8.13
11	7.5	7.6	9.6	3	24.7	206.17	8.23
12	7.6	8.0	9.4	3	25.0	210.12	8.33
N	12	12	12	36			
$\sum Y$	87.8	90.5	98.1		276.4		
$\sum Y^2$	688.86	729.96	863.22			2143.18	
$\bar{Y}_j$	7.32	7.54	8.18				7.68

細格效果

區組效果

獨變項效果

- **比較：相依樣本**
  為了節省受試者，只找了12個大學生參加運動實驗

1. 先參與低度運動量實驗，測量睡眠時數
2. 再參與中度運動量實驗，測得第二次睡眠時數
3. 最後參與高度運動量實驗，取得第三次睡眠時數

→同一組人重複實施三次測量

一般線性模式原理

- 一般線性模式

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_j + \pi_i + \varepsilon_{ij}$$

- 兩個獨立的變異源
  - π_i：區組效果，表區組間的差異，強度為$\mu_i - \mu$，為第i個區組平均數的離均差
  - α_j：獨變項效果，表獨變項水準間的差異，強度為$\mu_j - \mu$（第j組平均數的離均差）
  - ε_{ij}：誤差效果，為同一個水準的每一位受試者的得分變異

相依樣本之one-way ANOVA

$$X_{ij} = \mu + \beta_j + \pi_i + \varepsilon_{ij}$$

β_j：個別差異之誤差

$(\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{\cdot\cdot})$（個別差異所造成之誤差）為 π_i 之不偏估計值

$(X_{ij} - \bar{X}_{\cdot j} - \bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{\cdot\cdot})$（誤差）為 ε_{ij} 之 〃 〃 〃

$$X_{ij} = \bar{X}_{\cdot\cdot} + (\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X}_{\cdot\cdot}) + (\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{\cdot\cdot}) + (X_{ij} - \bar{X}_{\cdot j} - \bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{\cdot\cdot})$$

$$(X_{ij} - \bar{X}_{\cdot\cdot}) = (\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X}_{\cdot\cdot}) + (\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{\cdot\cdot}) + (X_{ij} - \bar{X}_{\cdot j} - \bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{\cdot\cdot})$$

$$\vdots$$

$$\sum\sum (X_{ij} - \bar{X})^2 = \sum\sum (X_{\cdot j} - \bar{X}_{\cdot\cdot})^2 + \sum\sum (\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{\cdot\cdot})^2 + \sum\sum (X_{ij} - \bar{X}_{\cdot j} - \bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{\cdot\cdot})^2$$

$$SS_t = SS_{b\cdot tre} + SS_{b\cdot subj} + SS_{res}$$

$$SS_t = \sum_k \sum_n X^2 \;\textcircled{2} - \frac{(\sum\sum X)^2}{N} \;\textcircled{1}$$

$$SS_{b\cdot tre} = \sum_k \frac{\sum_n X^2}{n} \;\textcircled{3} - \frac{(\sum\sum X)^2}{N} \;\textcircled{1}$$

$$SS_{b\cdot subj} = \sum_n \frac{(\sum_k X)^2}{k} \;\textcircled{4} - \frac{(\sum\sum X)^2}{N} \;\textcircled{1}$$

$$SS_{res} = SS_t - SS_{b\cdot tre} - SS_{b\cdot subj} = \textcircled{2} - \textcircled{3} - \textcircled{4} + \textcircled{1}$$

相依樣本之one-way ANOVA

相依樣本之變異數分析摘要表

SV	SS	df	MS	F
實驗處理	③ − ①	$(k-1)$	$\frac{SS_{b\cdot tre}}{df_{b\cdot tre}}$	$\frac{MS_{b\cdot tre}}{MS_{res}}$
受試者間	④ − ①	$(n-1)$	$\frac{SS_{b\cdot subj}}{df_{b\cdot subj}}$	
殘　　差	② − ③ − ④ + ①	$(n-1)(k-1)$	$\frac{SS_{res}}{df_{res}}$ ←	
全　　体	② − ①	$N-1$		

*F*考驗與摘要表

變異來源	*SS*	*df*	*MS*	*F*
組間(A)	SS_A	$p-1$	SS_A/df_A	MS_A/MS_r
組內	SS_w	$p(n-1)$		
區組間(block)	SS_{block}	$(n-1)$	SS_{block}/df_{block}	
殘差(誤差)	SS_r	$(n-1)(p-1)$	SS_r/df_r	
全體	SS_{total}	$N-1$		

相依樣本單因子變異數分析
（受試者內設計）

例14-4　八名受試者先後參加對紅光、黃光、綠光、和藍光四種色光的反應時間實驗。表14-6是實驗的結果，每一受試者對四種色調光的四個反應時間。問對紅、黃、綠、藍四種色光之反應時間是否不相同？

學　生	紅	黃	綠	藍	橫列和	平方和
A	3	3	4	5	15	59
B	6	5	6	6	23	133
C	3	2	3	3	11	31
D	3	4	4	7	18	90
E	2	1	3	4	10	30
F	2	3	3	4	12	38
G	1	1	2	2	6	10
H	3	2	3	4	12	38
ΣX	**23**	**21**	**28**	**35**	**107**	
ΣX^2	**81**	**69**	**108**	**171**		**429**
$\overline{X}_{\cdot j}$	**2.875**	**2.625**	**3.500**	**4.375**		

〔計算代號〕

$$①=\frac{G^2}{nk}=\frac{(107)^2}{8\times 4}=357.781$$

$$②=\Sigma\Sigma X=3^2+6^2+\cdots\cdots+4^2=429$$

$$③=\frac{\Sigma(A)^2}{n}=\frac{(23)^2+(21)^2+(28)^2+(35)^2}{8}=372.375$$

$$④=\frac{\Sigma(S)^2}{k}=\frac{(15)^2+(23)^2+\cdots\cdots+(12)^2}{4}=405.750$$

計算公式〕

$$SS_t = ②-①=429-357.781 = 71.219$$

$$SS_{b.subject} = ④-① = 405.750-357.781 = 47.969$$

$$SS_{w.subject} = ②-④ = 429-405.750 = 23.250$$

$$SS_A = ③-① = 372.375-357.781 = 14.594$$

$$SS_{residual} = ②-④-③+① = 23.250-14.594 = 8.656$$

表 14-7　對四種色調光的反應時間變異數分析表

變異來源	離均差平方和	自由度	均　方	F
受試者間 $SS_{b.sub}$	47.969	7		
~~受試者內 $SS_{w.sub}$~~	~~23.250~~	~~24~~		
色調 $SS_{b.treat}$	14.594	3	4.865	11.81*
殘差 SS_{res}	8.656	21	.412	
全　體	71.219	31		

$^{**}F_{.99(3,21)}=4.87$

變異數分析的基本假定

1. **常態性(normality)**：樣本所來自的母群在實驗研究中數據的分配是常態分配的
   - 除了有充分證據顯示已違反常態性之假設，否則沒有必要去考驗常態性
   - 遇不合常態性假定時，可把α訂的較小(較嚴)
2. **可加性(additivity)**：各變異來源對總離均差平方和，可以分割為幾個可相加在一起的部分，即$SS_t=SS_b+SS_w$

3. 變異數同質性(homogeneity of variance)：各組所屬母群的變異數須假定為相同，亦即 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2=\sigma_k^2$，如果違反此假定將導致嚴重錯誤，所以變異數同質性是最值得遵守的一個假定

變異同質性考驗

1. Bartlett's test(p.333-334)
2. Hartley's test ： df=(k, n-1)

$$F_{\max} = \frac{\text{最大 } s_j^2}{\text{最小 } s_j^2}$$

查附錄表I，$F_{1-\alpha(k,n-1)}$

資料的轉換

◎若資料明顯違反變異數分析的基本假設，則可視資料的特性做適當的轉換：

1. 各組平均數與變異數之比值相當(即 $\bar{Y}_{.j}/s_j^2$ 成比例)時，進行根平方轉換，$X'=\sqrt{X}$。

2. 各組平均數與標準差之比值相當(即 $\bar{Y}_{.j}/s_j$ 約相等)時，進行對數轉換，$X'=\log_{10} X$。

3. 各組平均數的平方與標準差之比值相當(即 $\bar{Y}_{.j}^2/s_j$ 成比例)時，進行倒數轉換，$X'=1/X$ 。

違反變異同質性，該怎麼辦?

- **做資料轉換**:若轉換後的數據符合變異同質性，則用**轉換後的數據**進行ANOVA。
- **改用無母數統計**:如克-瓦單因子等級變異數分析(H考驗)(for獨立樣本)，弗里曼二因子等級變異數分析(for相依樣本)。
- 將顯著水準訂得更嚴苛，如.01或.001
- 其他…

例題示範

- 研究假設為：高、中、低三種不同運動量的受測者，其睡眠時間不同，請檢驗此研究假設是否合理？

表 10.2　運動對睡眠影響研究數據

輕度運動量組		中度運動量組		重度運動量組	
6.5	7.1	7.4	7.4	8.0	8.2
7.3	7.9	6.8	8.1	7.7	8.5
6.6	8.2	6.7	8.2	7.1	9.5
7.4	7.7	7.3	8.0	7.6	8.7
7.2	7.5	7.6	7.6	6.6	9.6
6.8	7.6	7.4	8.0	7.2	9.4
$\bar{X}_1=\Sigma X_{1j}/n_1=7.32$		$\bar{X}_2=\Sigma X_{2j}/n_2=7.54$		$\bar{X}_3=\Sigma X_{3j}/n_3=8.18$	
$\bar{X}_G=\Sigma X_{ij}/N=7.68$					

第十五章
相關與簡單迴歸分析與檢驗

積差相關的假設考驗

- H0: $\rho_{XY} = (\rho_0 = 0)$
- H1: $\rho_{XY} = (\rho_0 \neq 0)$

  - 相關係數的t檢定自由度為$N-2$，表兩個變項各取一個自由度進行樣本變異數估計

積差相關係數的假設考驗

當ρ_{xy} = .00及雙側考驗時

例11-7 某教師想知道學生的學業成績與成就動機測驗分數之間是否有相關存在。利用20名學生求兩者之積差相關，得r=.52。問學業成績與成就動機測驗分數的相關可以說不是0嗎?

Step1： H_0 ： $\rho = .00$， H_1 ： $\rho \neq .00$

Step2：r的雙側考驗，可查詢附錄表B

- Step3：查表知ρ = .00，*N*=20，*df* =*N*-2=18，得*r* 的絕對值大於.444的概率只有.05 。

故若α=.05時，實際計算的r值之絕對值大於.444，亦即計算的r值落入拒絕區，便可以拒絕 H_o ： ρ = .00

- Step4：該教師實得r值為 .52，落入拒絕區，故虛無假設 H_o ： ρ = .00應予以拒絕。這位教師應可相信學業成績與成就動機測驗成績之間有相關存在

- 用t公式來考驗r值

$$t = \frac{r - \rho}{\sqrt{\frac{1 - r^2}{N - 2}}}$$

- Step1： H_O ：$\rho = .00$，H_1 ：$\rho \neq .00$
- Step2： $\rho_{xy} = .00$ ，$N=20$，得$r=.52$。又假定 $r - \rho = .52 - .00 = .52$ 為t分配中的一個樣本。

- Step3： $\alpha = .05$

  $t_{.025\ (20-2)} = -2.101 \quad t_{.975\ (20-2)} = 2.101$

  Step4： $$t = \frac{.52 - .00}{\sqrt{\frac{1-(.52)^2}{20-2}}} = 2.58$$

- 2.58大於 2.101，達顯著水準，故應拒絕虛無假設Ho ，即學業成績與動機測驗成績之間並不是零相關，屬於中度正相關

當ρ_{xy} = .00及單側考驗時

例11-8 某研究者主張兒童的概念速率(conceptual tempo)與其數學成績之間有正相關存在。他利用12名學生求兩者之積差相關，得r=.47。問證據是否可以支持這位研究者的說法?

Step1： H_0 ： $\rho \leqq .00$ ， H_1 ： $\rho > .00$

Step2： 假定這位心理學家自一個ρ=.00的母群中無限多次取樣 ，每次樣本大小為*N*=12。這一個*r*=.47為無限多次取樣之中的一次

- Step3： $\alpha = .05$

  $t_{1-.025\,(12-2)} = 1.812$

Step4： $$t = \frac{.47 - .00}{\sqrt{\frac{1-(.47)^2}{12-2}}} = 1.68$$

1.68小於 1.812，未達顯著水準，故應接受虛無假設Ho，即概念速率與數學成績之間有正相關的說法無法獲得支持，換言之，概念速率與數學成績之間沒有關係。

迴歸模型的顯著性考驗

- R^2的基本原理是變異數，因此對於R^2的檢定可利用F考驗來進行

變異來源	SS	df	MS	F
迴歸效果	SS_r	p	SS_r/df_r	MS_r/MS_e
誤差	SS_e	$N-p-1$	SS_e/df_e	
全　　體	SS_t	$N-1$		

迴歸係數的區間估計

- *b*係數為未標準化係數，用以反應獨變項對於依變項的影響程度
- *b*係數可以得知獨變項的變動在依變項的變動情形
- 利用模型的迴歸係數標準誤，*b*係數的區間估計可用來推估母數出現的範圍
- *利用b*係數的95%信心估計區間是否涵蓋0，來檢驗*b*係數是否顯著不等於0

$$(1-\alpha)CI = b \pm t_{(\alpha/2,df)} s_b$$

估計標準誤的意義

估計標準誤$S_{Y \cdot X}$是根據迴歸線上的分數 $\hat{Y}$ 來預測Y_i所產生的估計誤差。

我們希望SS_{res}越小越好，也就是希望「估計標準誤」，亦即$S_{Y \cdot X}$要盡量的小

$$S_{Y \cdot X} = \sqrt{\frac{\Sigma\left(Y - \hat{Y}\right)^2}{N}} = \sqrt{\frac{SS_{res}}{N}}$$

估計標準誤的實際應用

適用於描述性統計：

$$S_{Y \cdot X} = \sqrt{\frac{\sum\left(Y - \hat{Y}\right)^2}{N}} = \sqrt{\frac{SS_{res}}{N}}$$

在推論統計裡，當母群的$\sigma_{Y \cdot X}$不知道，而要從樣本估計$\sigma_{Y \cdot X}$時，要使用下列的不偏估計值：

$$s_{Y \cdot X} = \sqrt{\frac{\sum\left(Y - \hat{Y}\right)^2}{N-2}} = \sqrt{\frac{SS_{res}}{N-2}}$$

$$\sigma_{Y \cdot X} = \sigma_Y \sqrt{1 - r_{XY}^2}$$

由此可看出，相關係數越大，估計標準誤越小，越可以從X變數正確預測Y變數；相反的，相關係數越小，估計標準誤便越大，預測正確性便大為減低。

疏離係數事實上是代表根據X變數預測Y變數時的估計標準誤與Y變數之標準差的比：

$$\sqrt{1-r_{XY}^2}=\frac{\sigma_{Y\cdot X}}{\sigma_Y}$$

這一比值越小，預測越正確；比值越大，預測越不正確。

等分散性

不管預測變項X的分數高或分數低，與該預測變項相對應之Y的得分之分散情形卻都假定為相同，亦即估計標準誤都是$\sigma_{Y.X}$。不管預測變項之分數高或低，效標變項的估計標準誤均一樣大的特性，稱之為「等分散性」。

等分散性假設，以及$\sigma_{Y.X}$和σ_Y圖示

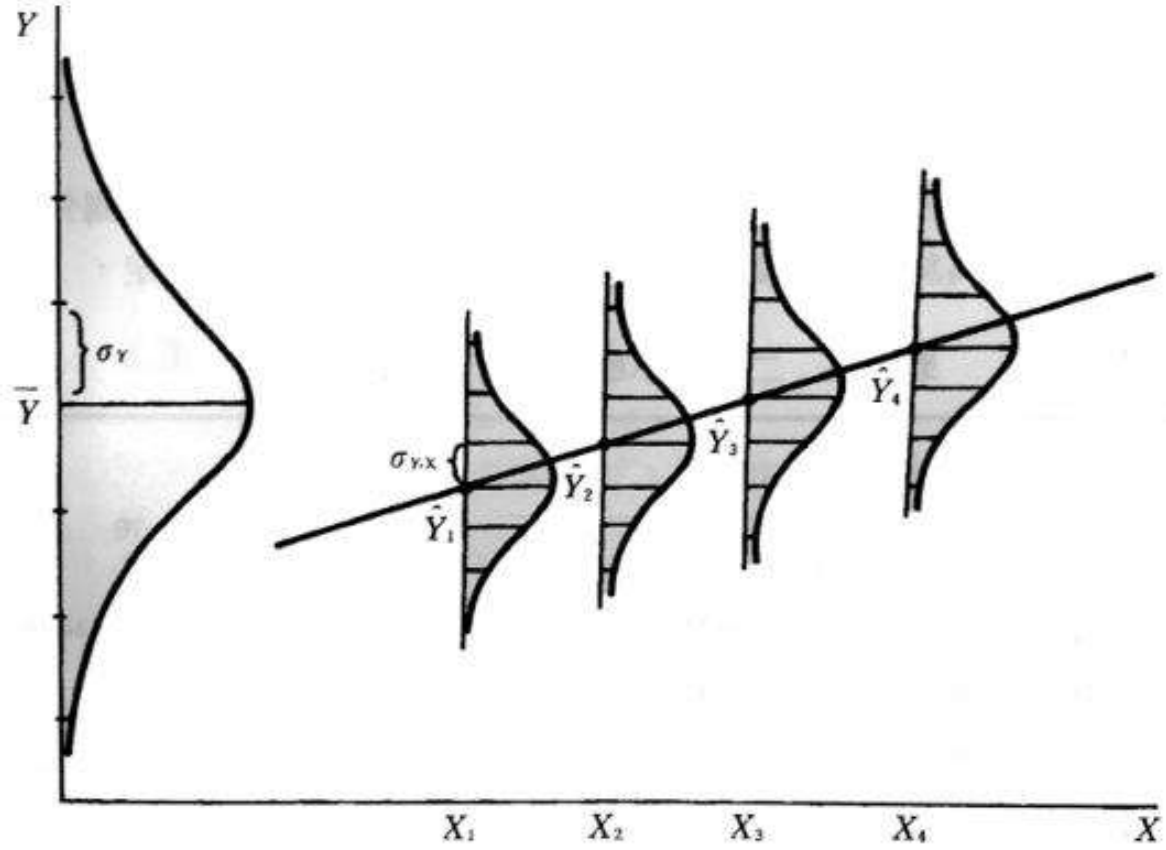


圖 8-9　等分散性假設，以及 $\sigma_{Y\cdot X}$ 和 σ_Y 的圖示

例8-2　某數學科教師欲甄選學業高成就者與低成就者，以便進行數學科的學習輔導。他利用表8-4的資料求得迴歸公式為 $\hat{Y}=.73X-5.73$ 和估計標準為 $s_{Y\cdot X}=6.28$。他所下的操作定義為「凡數學實得分數高於根據智商所預測分數兩個估計標準誤者為高成就者，低於預測分數兩個估計標準誤者為低成就者」。今有甲乙丙三生，其智商依次為96，110，123，其實得數學分數依次為67，87，70。問何者為高成就者或低成就者？

$$b = \frac{172975 - \frac{(2240)(1520)}{20}}{254628 - \frac{(2240)^2}{20}} = .7297$$

$$a = 76 - (.7297)(112) = -5.73$$

$$\hat{Y} = .73X - 5.73$$

甲生：　$\hat{Y}$＝.73（96）－5.73＝64.35

$Y-\hat{Y}$＝67－64.35＝2.65

實得分數高於預測分數.42個估計標準誤

（即 2.65÷6.28＝0.42）

乙生：　$\hat{Y}$＝.73（110）－5.73＝74.57

$Y-\hat{Y}$＝87－74.57＝12.43

實得分數高於預測分數1.98個估計標準誤

（即12.43÷6.28＝1.98）

丙生：　$\hat{Y}$＝.73（123）－5.73＝84.06

$Y-\hat{Y}$＝70－84.03＝－14.06

實得分數低於預測分數2.24個估計標準誤

（即－14.06÷6.28＝2.24）

例8-3　某測驗專家編制完成一種「學業性向測驗」，採用學業平均成績為效標。大量選取具代表性受試者後，求得平均成績之標準差σ_Y＝5.49，效標關聯效度（criterion-related validity）r_{XY}＝.87。以某生學業性向測驗成績（X）帶入預測公式，得學業平均成績之預測成績$\hat{Y}$＝83。問該生學業成績的真正分數可能落在哪一個範圍？

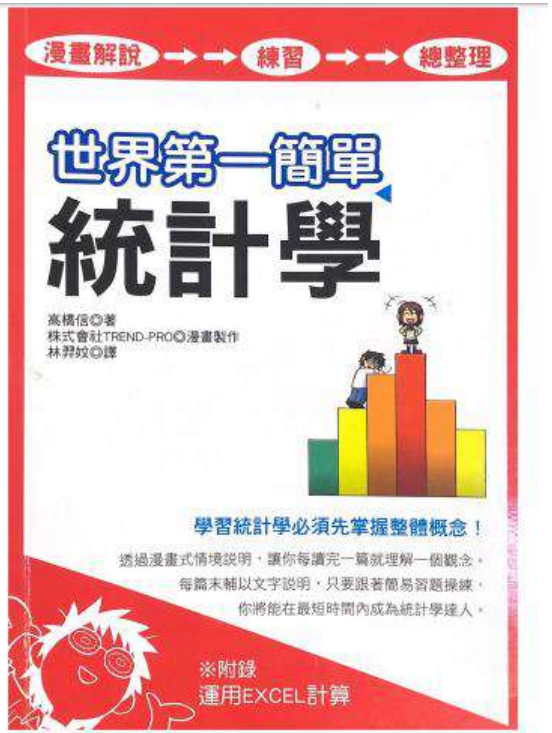
$$\sigma_{Y\cdot X} = \sigma_Y \sqrt{1-r_{XY}^2} = 5.49\sqrt{1-(.87)^2} = 2.71$$

這是根據性向測驗X預測學業平均成績Y的時的估計標準誤，當 $\hat{Y}$=83，

Y落入83± 2.71 的概率 是.6826；
Y落入83±2(2.71)的概率 是.9544；
Y落入83±3(2.71)的概率 是.9974。

補充參考資料

- 高橋信，林羿妏譯(2008)。**世界第一簡單統計學**。世茂出版。



目次

目　次

◆序章　令人悸動的統計學♥ ・・・・・・・・・・・・1

◆第一章　確認資料的種類 ・・・・・・・・・・・・13

☆1. 類別資料和數值資料 ・・・・・・・・・・・・・・・14
☆2. 類別資料必須注意的實例 ・・・・・・・・・・・・20
☆3. 實務中「非常有趣」～「非常無趣」的運用 ・・・・・28
例題和解答 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・29
總整理 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・29

◆第二章　掌握資料整體的狀態〈數值資料篇〉・31

☆1. 次數分配表和直方圖 ・・・・・・・・・・・・・・・32
☆2. 平均數 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・40
☆3. 中位數 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・44
☆4. 標準差 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・48
☆5. 次數分配表的組距 ・・・・・・・・・・・・・・・・54
☆6. 推論統計學和敘述統計學 ・・・・・・・・・・・・・57
例題和解答 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・57
總整理 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・58

◆第三章　掌握資料整體的狀態〈類別資料篇〉・59

☆1. 次數分配表 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・60
例題和解答 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・64
總整理 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・64

◆第四章　標準分數和離均差分數 ・・・・・・・・65

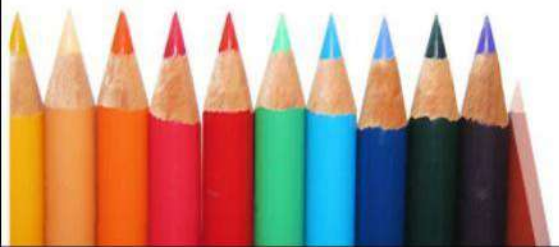
☆1. 標準化和標準分數 ・・・・・・・・・・・・・・・・66
☆2. 標準分數的特徵 ・・・・・・・・・・・・・・・・・73
☆3. 離均差分數 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・74
☆4. 離均差分數的解釋 ・・・・・・・・・・・・・・・・76
例題和解答 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・78
總整理 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・80

◆第五章　求機率 ・・・・・・・・・・・・・・・・81

☆1. 機率密度函數 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・82
☆2. 常態分配 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・86
☆3. 標準常態分配 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・89
☆4. 卡方分配 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・99
☆5. t 分配 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・106
☆6. F 分配 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・106
☆7.「X X分配」和 EXCEL ・・・・・・・・・・・・・・107
例題和解答 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・108
總整理 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・109

◆第六章　調查 2 變數的關聯 ・・・・・・・・・111

☆1. 相關係數 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・116
☆2. 相關比 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・121
☆3. 克拉瑪相關係數 ・・・・・・・・・・・・・・・・・127
例題和解答 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・138
總整理 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・142



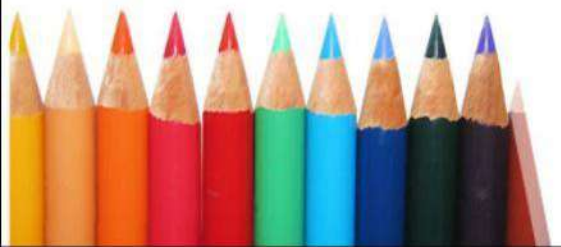
◆第七章　深入理解獨立性檢定 ・・・・・・・143

☆1. 檢定是什麼？ ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・144
☆2. 獨立性檢定 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・151
☆3. 虛無假說和對立假說 ・・・・・・・・・・・・・・・・170
☆4. P值和「檢定」的順序 ・・・・・・・・・・・・・・・175
☆5. 獨立性檢定和齊一性檢定 ・・・・・・・・・・・・・・184
☆6.「檢定」的結論表現 ・・・・・・・・・・・・・・・・・187
例題和解答 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・188
總整理 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・189

◆附錄　運用EXCEL計算 ・・・・・・・・・・・・191

■1　做成次數分配表（的一部分） ・・・・・・・・・・・・192
■2　算出平均數、中位數、標準差 ・・・・・・・・・・・・195
■3　做成次數分配表（的一部分） ・・・・・・・・・・・・197
■4　算出標準分數、離均差分數 ・・・・・・・・・・・・・199
■5　算出標準常態分配的機率 ・・・・・・・・・・・・・・204
■6　算出卡方分配的橫軸刻度 ・・・・・・・・・・・・・・205
■7　算出相關係數的值 ・・・・・・・・・・・・・・・・・207
■8　獨立性檢定 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・208

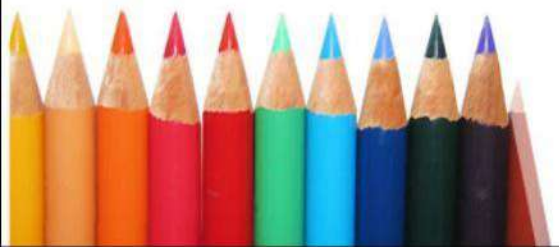
索引 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・212



內容試閱

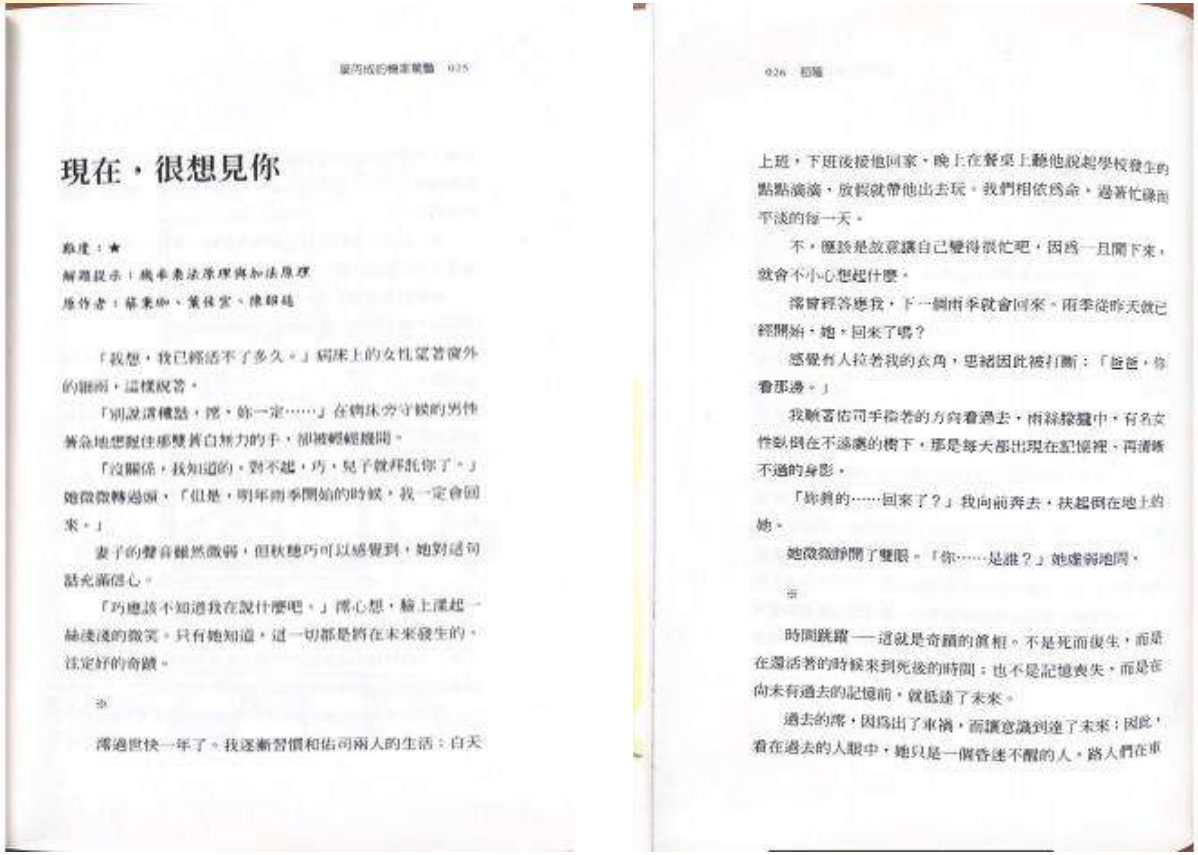
沒錯。
因此，若調查全部的人來求出內閣支持率，這個數值就會非常準確，而不會有任何疑問吧？
嗯。
不過，要調查如此眾多的人數是相當困難的。
是呀！
所以才會限定人數來進行調查。
是的
琉衣，統計學上，將應做爲眞正調查對象的集合稱爲「母體*1」，而由母體中取出的部份個體所組成的集合則稱爲「樣本*2」。
爸爸又開始講難懂的東西來欺負琉衣啦！
*1 母體：Population
*2 樣本：Sample
6 序章◆令人悸動的統計學

總之，以內閣支持率爲例，母體即爲「所有有投票權者」。
而這個調查似乎是以2000人爲詢問對象，因此這2000人即爲樣本。
所有有投票權者
抽出
2000人
母體
樣本
如果可能的話，當然希望調查母體。
然而，這在現實上是不可能的。眞是令人困擾呀！
就算無法進行精細的調查，難道沒辦法盡可能正確得知母體的狀況嗎？
100m²
然而排解這個煩惱的最佳方法就是統計學喲！
哦！再多教我一些吧！
哈哈。那就下次吧。
果然很餓～
7



- 葉丙成、賴以威(2014)。**葉丙成的機率驚豔：當數學遇上文學，學生考不好也會笑著離開**。究竟出版。

內容試閱



現在，很想見你

難度：★

解題提示：機率乘法原理與加法原理

原作者：蔡秉卿、葉佳宏、陳韻廷

「我想，我已經活不了多久。」病床上的女性望著窗外的雨雨，這樣說著。

「別說這種話，擦，妳一定……」在病床旁守候的男性著急地想握住那雙蒼白無力的手，卻被輕輕擺開。

「沒關係，我知道的，對不起，巧，兒子就拜託你了。」她微微轉過頭，「但是，明年雨季開始的時候，我一定會回來。」

妻子的聲音雖然微弱，但秋穗巧可以感覺到，她對這句話充滿信心。

「巧應該不知道我在說什麼吧。」澤心想，臉上漾起一絲淺淺的微笑。只有她知道，這一切都是將在未來發生的，注定好的奇蹟。

※

澤過世快一年了。我逐漸習慣和佑司兩人的生活：白天

上班，下班後接他回家，晚上在餐桌上聽他說起學校發生的點點滴滴，放假就帶他出去玩。我們相依為命，過著忙碌而平淡的每一天。

不，應該是故意讓自己變得很忙吧，因為一旦閒下來，就會不小心想起什麼。

澤曾經答應我，下一個雨季就會回來。雨季從昨天就已經開始，她，回來了嗎？

感覺有人拉著我的衣角，思緒因此被打斷：「爸爸，你看那邊。」

我順著佑司手指著的方向看過去，雨絲朦朧中，有名女性獨倒在不遠處的樹下，那是每天都出現在記憶裡、再清晰不過的身影。

「妳真的……回來了？」我向前奔去，扶起倒在地上的她。

她微微睜開了雙眼。「你……是誰？」她虛弱地問。

※

時間跳躍——這就是奇蹟的真相。不是死而復生，而是在還活著的時候來到死後的時間；也不是記憶喪失，而是在尚未有過去的記憶前，就抵達了未來。

過去的澤，因為出了車禍，而讓意識到達了未來；因此，看在過去的人眼中，她只是一個昏迷不醒的人。路人們在車

祖現場呼喚著潘，每聲呼喚，都有六分之一的機會傳入她的意識之中，累積三次後，她就會甦醒，意識將從未來回到現在。

至於那些沒有傳入意識的呼喊，則有可能停留在未來或過去之間，讓潘無法回到現在，其中有二分之一的機率會讓她在未來多逗留兩天，另外有三分之一的機率，讓她可以多待四天。

這是命題所給予的遺物－呼喚傳入潘的意識中所需要的次數，將成爲一個幾何分布：

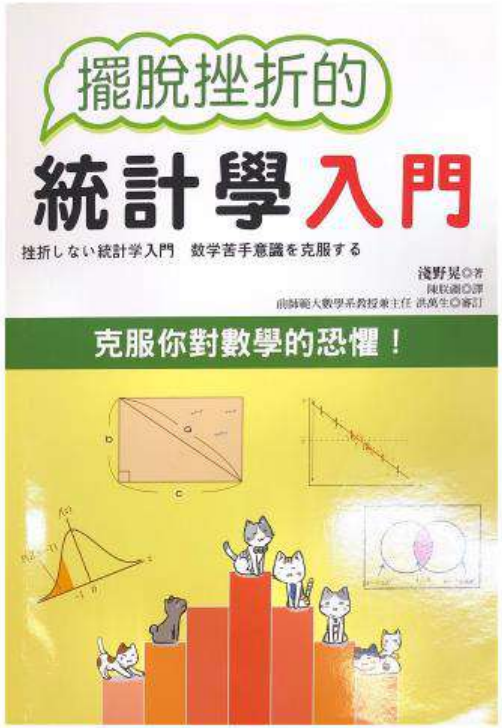
$$P_k(n) = p(1-p)^{n-1} \cdot p = \frac{1}{6}$$

所以，平均需要呼喚六次，潘才能接收到一次訊息，在與意識擦肩而過的五次呼喚中，她可以多待在未來兩天的機率爲：

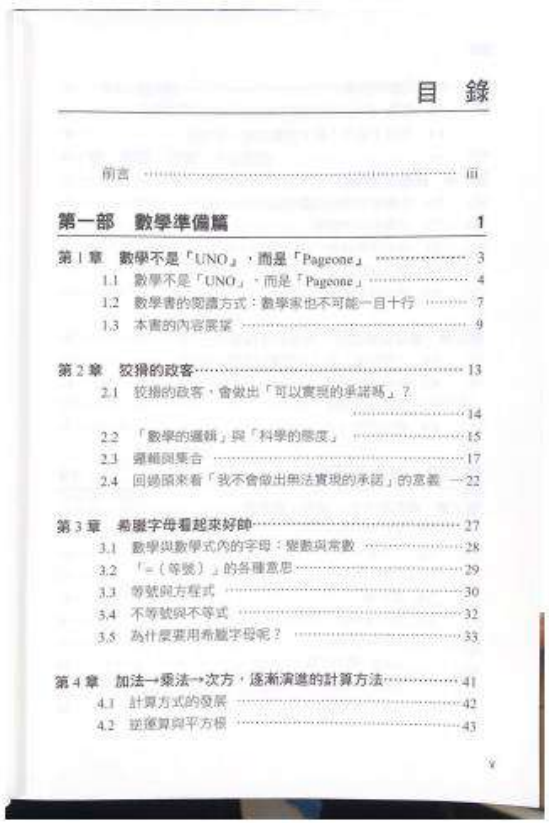
$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{5}$$

可以多待四天的機率爲五分之二，平均來說，每次呼喚的時機能讓她多待在未來的時間爲：

- 淺野晃(2019)。**擺脫挫折的統計學入門**。世茂出版。



目次



目　錄

前言 …… iii

第一部　數學準備篇 1

第 1 章　數學不是「UNO」，而是「Pageone」 …… 3
1.1 數學不是「UNO」，而是「Pageone」 …… 4
1.2 數學書的閱讀方式：數學家也不可能一目十行 …… 7
1.3 本書的內容展望 …… 9

第 2 章　狡猾的政客 …… 13
2.1 狡猾的政客，會做出「可以實現的承諾嗎」？ …… 14
2.2 「數學的邏輯」與「科學的態度」 …… 15
2.3 邏輯與集合 …… 17
2.4 回過頭來看「我不會做出無法實現的承諾」的意義 …… 22

第 3 章　希臘字母看起來好帥 …… 27
3.1 數學與數學式內的字母：變數與常數 …… 28
3.2 「=（等號）」的各種意思 …… 29
3.3 等號與方程式 …… 30
3.4 不等號與不等式 …… 32
3.5 為什麼要用希臘字母呢？ …… 33

第 4 章　加法→乘法→次方，逐漸演進的計算方法 …… 41
4.1 計算方式的發展 …… 42
4.2 逆運算與平方根 …… 43

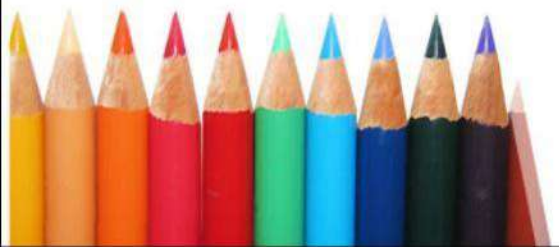
4.3 指數的推廣 …… 45
4.4 對數 …… 46
4.5 符號 Σ 表示「把 n 個數加總」的意思 …… 49

第 5 章　函數與數學式 …… 53
5.1 以數學式表示函數 …… 54
5.2 自變數與依變數 …… 55
5.3 有名字的函數 …… 56
5.4 畫出函數的圖 …… 57
5.5 統計學與函數 …… 60

第 6 章　從單位到微分、從合計到積分 …… 63
6.1 「單位量」與「合計量」常讓人搞混 …… 64
6.2 從單位到微分 …… 67
6.3 從合計到積分 …… 71
6.4 關於機率密度 …… 75

第二部　統計學基礎篇 79

第 7 章　資料的分布、平均、變異數 …… 81
7.1 統計學與龐量資料 …… 82
7.2 「分散的資料」、「資料分布」 …… 84
7.3 次數分布 …… 85
7.4 直方圖 …… 87
7.5 為什麼要取「平均」？各式各樣的平均 …… 90
7.5.1 算術平均 …… 91
7.5.2 幾何平均 …… 93
7.5.3 調和平均 …… 94
7.5.4 中位數 …… 96



7.6 變異數 …… 96
7.7 計算變異數時，為什麼要把數值平方呢？ …… 100

第 8 章 相關、迴歸、決定係數 …… 103
8.1 相關關係與相關係數 …… 104
8.1.1 多變量分析與相關關係 …… 104
8.1.2 散布圖 …… 105
8.1.3 共變異數與相關係數 …… 106
8.2 迴歸分析 …… 111
8.3 決定係數：可以決定什麼呢？ …… 115
8.4 為了求出迴歸直線 …… 119
8.4.1 微分與極值 …… 119
8.4.2 最小平方法與偏微分 …… 120
8.5 補充：推導數學式 …… 126
8.5.1 對最小平方法的數學式偏微分，推導出迴歸係數（式（8.3））…… 126
8.5.2 殘差與相關係數（式（8.5））…… 127

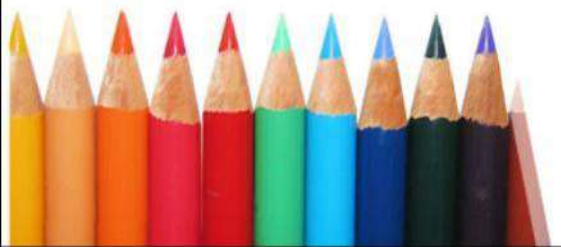
第 9 章 機率 …… 129
9.1 為什麼統計的書會提到機率呢？ …… 130
9.2 機率與「佔比」 …… 130
9.2.1 由次數定義機率 …… 130
9.2.2 拉普拉斯的定義 …… 132
9.3 條件機率與「獨立」 …… 135
9.4 機率的三大誤解 …… 137
9.4.1 「誤以為獨立」 …… 138
9.4.2 「誤以為機率相等」 …… 138
9.4.3 「誤以為成本相同」 …… 142

第 10 章 隨機變數與機率分布模型 …… 145
10.1 隨機變數的概念 …… 146
10.2 機率分布模型與常態分布、中央極限定理 …… 148
10.2.1 機率分布模型 …… 148
10.2.2 常態分布模型與中央極限定理 …… 150
10.2.3 常態分布模型的性質 …… 151

第三部 統計學進階篇 161

第 11 章 推論統計與大數法則 …… 163
11.1 推論統計是在做什麼呢？ …… 164
11.2 次數分布與樣本的機率分布 …… 165
11.3 大數法則 -「通常」與「幾乎」 …… 167
11.4 大數法則與保險 …… 170
11.5 母體與樣本 …… 173

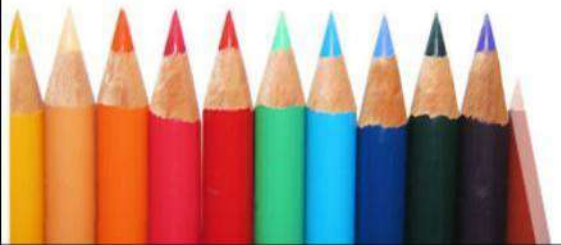
第 12 章 區間估計與檢定 …… 177
12.1 區間估計 …… 178
12.1.1 什麼是區間估計 …… 178
12.1.2 常態分布與區間估計 …… 181
12.1.3 信心水準與信賴區間的注意事項 …… 184
12.2 不偏變異數、t 分布與區間估計 …… 185
12.2.1 不偏變異數 …… 185
12.2.2 t 分布與區間估計 …… 187
關於「Student」這個名字 …… 189
12.3 檢定是「在某條件下的審判」 …… 190
12.3.1 什麼是假設檢定 …… 190
12.3.2 t 分布與檢定 …… 192
12.3.3 檢定的用語 …… 194



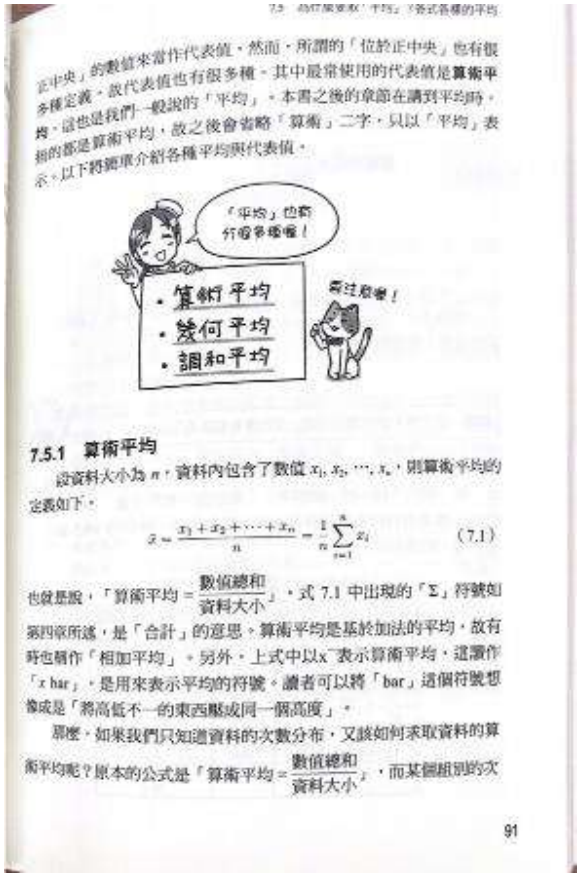
12.3.4 雙尾檢定與單尾檢定 …… 195
12.3.5 無法拒絕虛無假說的時候 …… 197
12.3.6 關於顯著水準 …… 198
12.3.7 「（在母體為常態分布，且顯著水準為 5% 的條件下）你在騙人」 …… 199

第 13 章 連續型機率分布與中央極限定理的意義 …… 207
13.1 連續型機率分布 …… 208
13.2 中央極限定理的意義 …… 211
13.3 常態分布在現實中存在嗎？ …… 216

第 14 章 樣本平均的變異數：為什麼會是「樣本大小分之一」呢？ …… 225
14.1 關於樣本平均的期望值與變異數 …… 226
14.2 邊際機率分布與聯合機率分布 …… 226
14.3 計算樣本平均的期望值與變異數的數學式 …… 231
14.3.1 隨機變數的期望值 …… 232
14.3.2 隨機變數之常數倍的期望值，隨機變數之和的期望值 …… 233
14.3.3 隨機變數的變異數 …… 236
14.3.4 隨機變數之常數倍的變異數，隨機變數之和的變異數 …… 238
附錄 本書所使用的常態分布表與 *t* 分布表 …… 244



內容試閱



正中央」的數值來當作代表值，然而，所謂的「位於正中央」也有很多種定義，故代表值也有很多種。其中最常使用的代表值是**算術平均**，這也是我們一般說的「平均」。本書之後的章節在講到平均時，指的都是算術平均，故之後會省略「算術」二字，只以「平均」表示。以下將逐一介紹各種平均與代表值。

7.5.1 算術平均

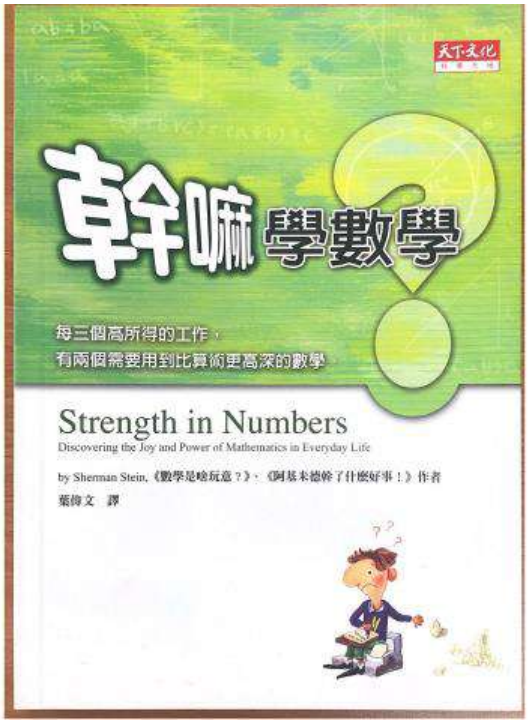
設資料大小為 n，資料內包含了數值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，則算術平均的定義如下：

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (7.1)$$

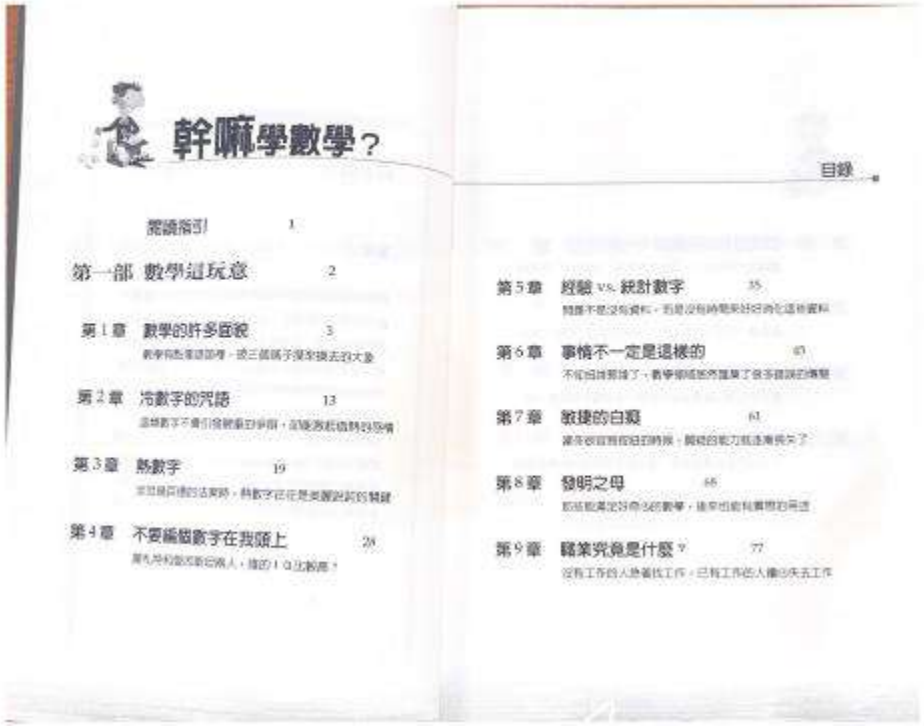
也就是說，「算術平均 = $\frac{\text{數值總和}}{\text{資料大小}}$」，式 7.1 中出現的「$\Sigma$」符號如第四章所述，是「合計」的意思。算術平均是基於加法的平均，故有時也稱作「相加平均」。另外，上式中以$\bar{x}$表示算術平均，這讀作「x bar」，是用來表示平均的符號。讀者可以將「bar」這個符號想像成是「將高低不一的東西壓成同一個高度」。

那麼，如果我們只知道資料的次數分布，又該如何求取資料的算術平均呢？原本的公式是「算術平均 = $\frac{\text{數值總和}}{\text{資料大小}}$」，而某個組別的次

- Sherman K. Stein，葉偉文譯(2015)。**幹嘛學數學?** Strength in Numbers。天下文化出版。



目次



幹嘛學數學？

目錄

閱讀指引 1

第一部 數學這玩意 2

第1章 數學的許多面貌 3

第2章 冷數字的咒語 13

第3章 熱數字 19

第4章 不要編個數字在我頭上 26

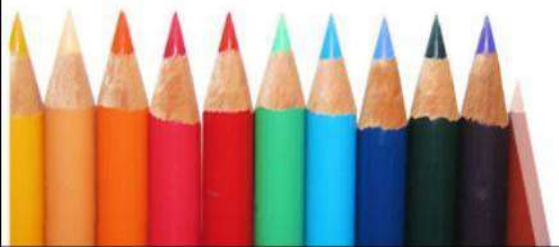
第5章 經驗 vs. 統計數字 35

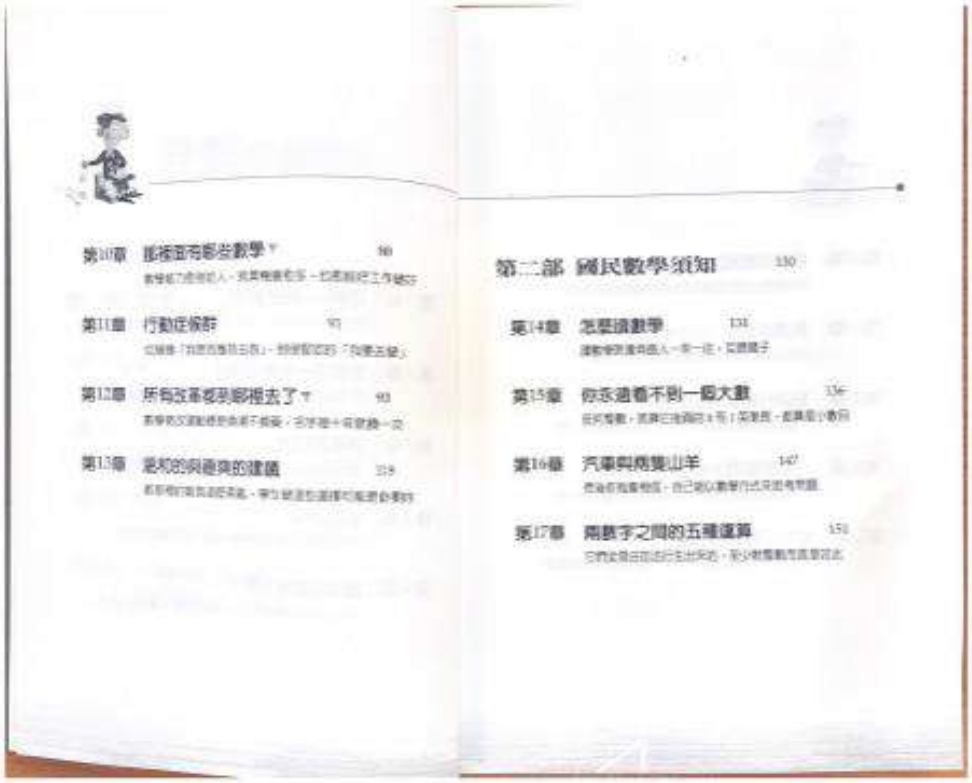
第6章 事情不一定是這樣的 47

第7章 敏捷的自殺 61

第8章 發明之母 66

第9章 職業究竟是什麼？ 77





第10章 那裡面有哪些數學？ 88

第11章 行動症候群 91

第12章 所有改革都到哪裡去了？ 93

第13章 混和的與適與的建議 119

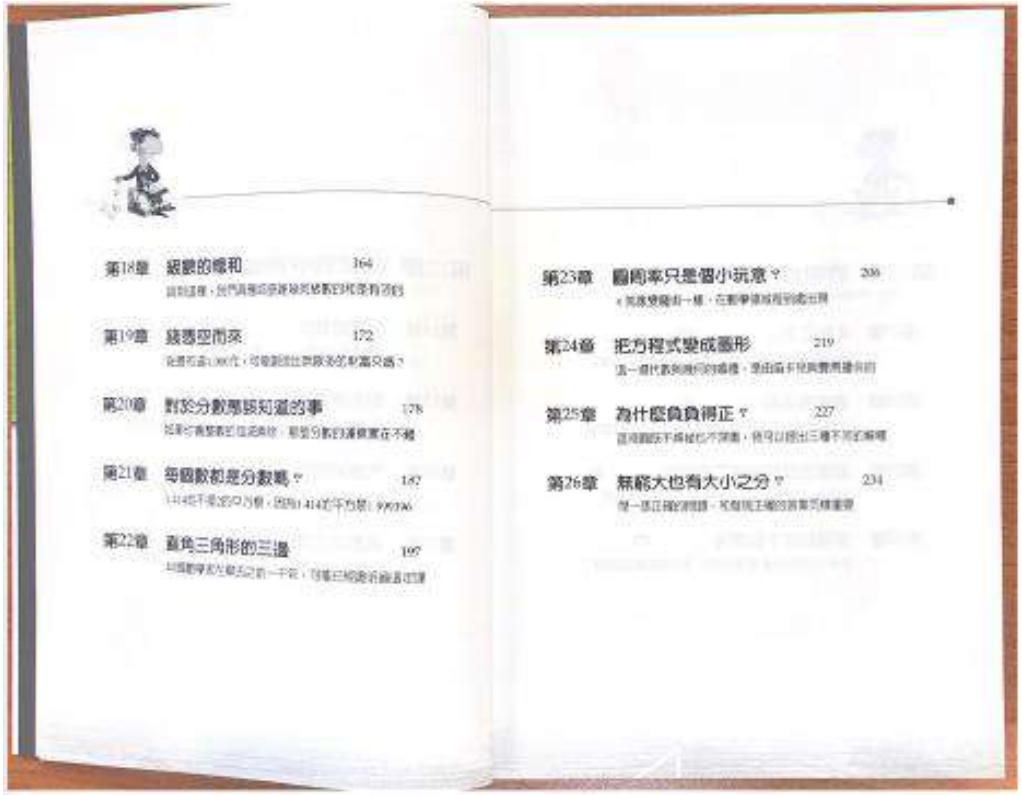
第二部 國民數學須知 130

第14章 怎麼讀數學 131

第15章 你永遠看不到一個大數 136

第16章 汽車與兩隻山羊 147

第17章 兩數字之間的五種運算 151



第18章 級數的總和 164

第19章 錢塘空而來 172

第20章 對於分數應該知道的事 178

第21章 每個數都是分數嗎？ 187

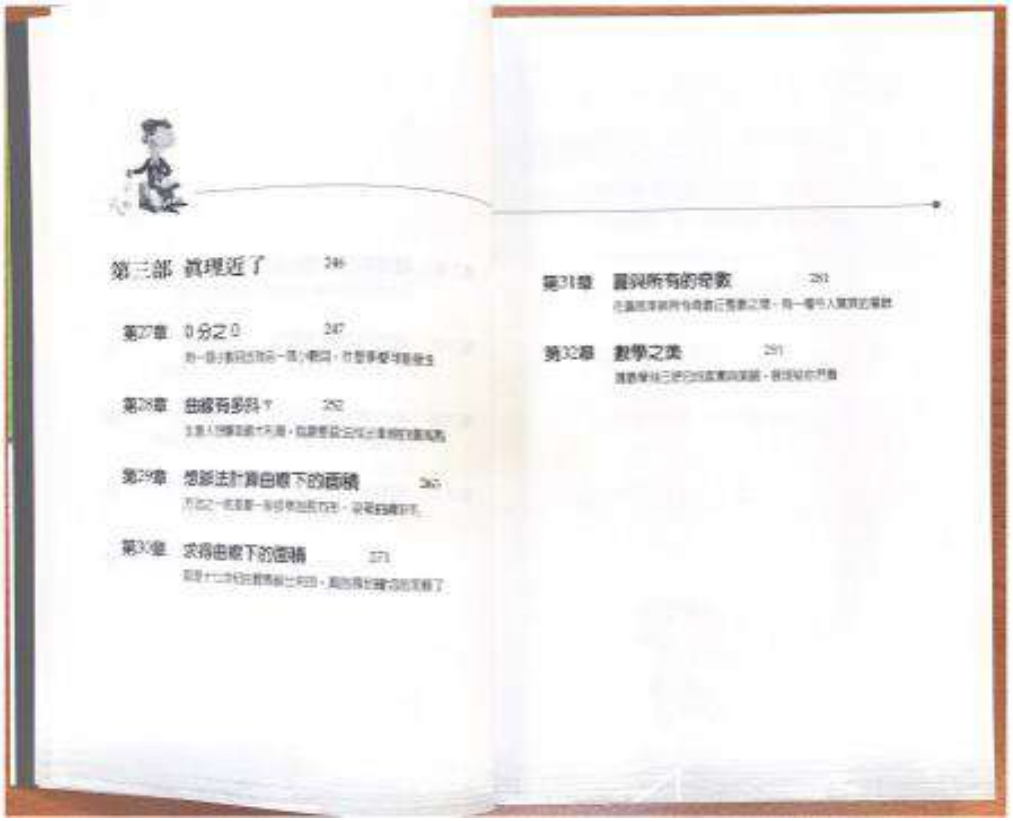
第22章 直角三角形的三邊 197

第23章 圓周率只是個小玩意？ 206

第24章 把方程式變成圖形 219

第25章 為什麼負負得正？ 227

第26章 無窮大也有大小之分？ 234



第三部 真理近了 246

第27章 0分之0 247

第28章 曲線有多長？ 252

第29章 想辦法計算曲線下的面積 265

第30章 求得曲線下的面積 271

第31章 最與所有的奇數 281

第32章 數學之美 291

內容試閱

1992年的9.3。

這個圖提供的訊息與上圖不太一樣，它指出每10萬人的謀殺案比率在9左右起伏，並沒有逐漸上揚的趨勢。電視新聞裡謀殺案畫面的增加，只是電視加強對這類新聞的報導而已。而且1995年，美國幾個大城市的謀殺案比率還曾經大幅降低過。

我們由此看出，想真正瞭解事實的真相並不容易，我們的確很容易被誤導。

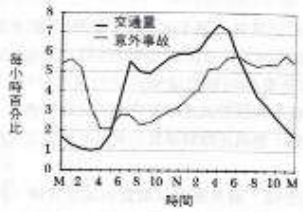
在同樣的報告裡，讀者還可以瞧見其他數據，例如暴力犯罪、竊盜、機車搶劫等等。有些犯罪率上升、有些下降，你想表達什麼立場，都可以得到足夠的數據支持。

夜間開車比較危險？

另外有個問題，晚上開車真的會比白天危險嗎？一般人都有類似的經驗。但無論爲科學方法或許有助於釐清。我決定比較每一小時交通意外事故的件數與相對的交通量。舉例來說，設定白天的某個特別時段（以一個小時計），發生交通事故的比率是全天事故的6%，但這時段的交通量是全天的3%，則這時段就算危險度很高。相反，如果這時段的意外事故是3%，而交通量是6%，則這時段算是低危險度時段。

正巧加州交通局記錄了高速公路與許多主要道路各小時的交通量。而高速公路巡邏隊又保留有嚴重交通事故的記錄，也是一小時一小時的。爲了比較這兩項資料，我要來很多的電腦報表。次頁的圖就是我歸納出來的數據。

這個圖的縱軸是「每小時百分比」。舉例來說，若一天24小時中，每小時的交通量完全一樣，則每小時都是1/24，大約是4%。但實際上每小時的交通量會改變。夜間的交通量比較小，白天比較



大，在清晨以及黃昏的上下班時段，交通量會出現兩個尖峰。

交通意外事故的圖形與交通量不太一樣。從早上6點到下午6點，它與交通量的趨勢一致。但爲什麼交通量很少的晚上反而交通意外這麼多？一定不會只是黑暗的關係，因爲意外事故率由凌晨2:00到4:00下降得很快，而交通量只低了一點點。

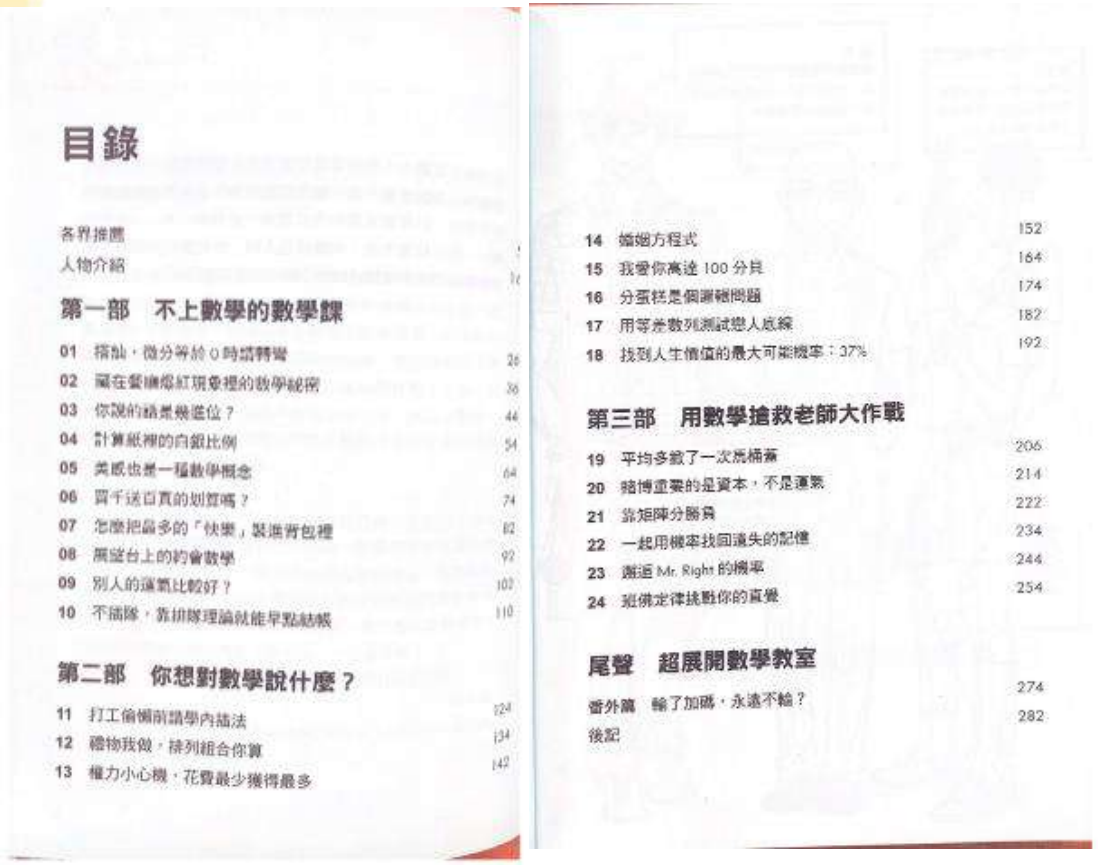
爲了解釋這個神祕現象，我特別定義了危險度。在一天當中的任何一小時，把事故百分比除以交通量的百分比，就是我這裡所說的危險度。舉例來說，若有某一個小時交通事故的百分比是6%，而交通量的百分比是3%，則危險度是6/3＝2。反過來看，若某一個小時的事故百分比是3%，而交通量百分比是6%，則危險度爲3/6＝0.5。在事故率很高而交通量很低的時段，危險度將會很大；若交通量大，事故率反而很低，則危險度會變小，應該小於1。

次頁的圖是一天24小時當中危險度的變化。從早上6點到下午6點，危險度緩慢上升，但從傍晚6點到凌晨兩點，它都急速攀升，原因何在？

正如一般人可能想到的，接著我就想瞭解那些發生死亡車禍的駕駛人，肇事時的酒精濃度。電腦裡連這類資料都有。

- 賴以威(2015)。**超展開數學教室：數學宅X5個問題學生，揪出日常生活裡的數學BUG**。臉譜出版。

目次



目錄

各界推薦
人物介紹

第一部　不上數學的數學課

01 指北，微分等於 0 時請轉彎
02 藏在愛麗絲紅斑皋裡的數學祕密
03 你說的話是幾進位？
04 計算紙裡的白銀比例
05 美感也是一種數學概念
06 買千送百真的划算嗎？
07 怎麼把最多的「快樂」裝進背包裡
08 展望台上的約會數學
09 別人的運氣比較好？
10 不插隊，靠排隊理論就能早點結帳

第二部　你想對數學說什麼？

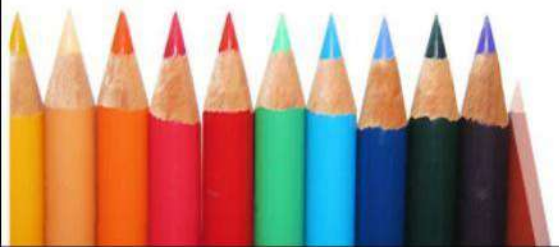
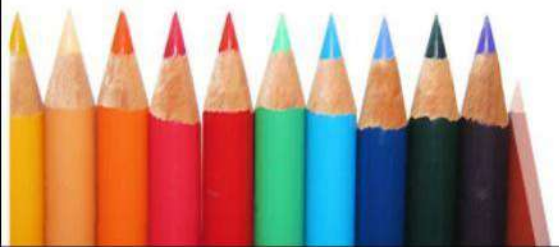
11 打工偷懶前請學內插法
12 禮物我做，排列組合你算
13 權力小心機，花費最少獲得最多
14 婚姻方程式
15 我愛你高途 100 分貝
16 分蛋糕是個謝賴問題
17 用等差數列測試戀人底線
18 找到人生價值的最大可能機率：37%

第三部　用數學搶救老師大作戰

19 平均多數了一次馬桶蓋
20 賭博重要的是資本，不是運氣
21 靠矩陣分勝負
22 一起用機率找回遺失的記憶
23 邂逅 Mr. Right 的機率
24 貝葉定律挑戰你的直覺

尾聲　超展開數學教室

番外篇　輸了加碼，永遠不輸？
後記



內容試閱